

## 第 2 講 ダイナミックパネル分析

### 2.1 ダイナミック・パネル推定

近年、経済主体は動学的最適化に基づいて行動しているという経済理論が主流であり、実証研究でも経済主体のダイナミックな調整に関心が集まっている。

一般にパネル・データでダイナミックな関係とは、被説明変数のラグが説明変数に入っていることをさす。すなわち、

$$y_{it} = \delta y_{it-1} + x'_{it}\beta + u_{it} \quad i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

ここで、 $\delta$  はスカラー、 $x'_{it}$  は  $1 \times K$  行列、 $\beta$  は  $K \times 1$  行列。 $u_{it}$  は一元配置誤差構成要素モデルに従っているとす。

$$u_{it} = \mu_i + \nu_{it} \quad (2)$$

ここで、 $\mu_i \sim IID(0, \sigma_\mu^2)$  は個別固定効果を表しており、 $\nu_{it} \sim IID(0, \sigma_\nu^2)$  は攪乱項を表し、相互に独立である。

ダイナミック・パネル推定を巡る大きな問題はラグ被説明変数が誤差項  $u_{it}$  と相関していること、そしてデータがクロスセクション方向 ( $N$ ) には大きい、時系列方向 ( $T$ ) には小さいということである<sup>1</sup>。これは攪乱項  $\nu_{it}$  が系列相関していない場合にも当てはまる。この問題に対しては二つの解決方法が提案されている。一つは Anderson and Hsiao (1981)、Arellano (1989)、Hahn, Hausman and Kuersteiner (2002) らによる操作変数法であり、いま一つは、Arellano and Bond (1991)、Ahn and Schmidt (1995) らによる一般化積率法 (GMM) である<sup>2</sup>。

固定効果推定であれランダム効果推定であれ、上の (1) 式から一階の階差をとれば  $\mu_i$  は消去されてしまう。すなわち、

$$y_{it} - y_{it-1} = (x_{it} - x_{it-1})'\beta + \delta(y_{it-1} - y_{it-2}) + (\nu_{it} - \nu_{it-1}) \quad (3)$$

このモデルはラグ被説明変数の階差が攪乱項  $\nu_{it}$  の階差と相関しているという意味では問題が残っているが<sup>3</sup>、操作変数法を用いて推定することで内生性バイアスを取り除くことができる。すなわち、有効ではないが一致推定を

<sup>1</sup>時系列が短いという問題に対しては一般に時間軸は長くなくてもよいと考えることができる。むしろ経済主体のダイナミックな調整パラメータは時間と共に変化する可能性が高いので、それが一定とみなされる期間 (例えば 5 年) ぐらいに限定したほうがいいとも言える。調整スピードが速い場合には 1 年以内に調整が終わり、前年の実績 (ラグ変数) はほとんど説明力をもたないといケースもある。

<sup>2</sup>このアプローチはさらに Arellano and Bover (1995)、Blundell and Bond (1998) らによって拡張されている。

<sup>3</sup>具体的には  $y_{it-1}$  と  $\nu_{it-1}$  は (1) 式より明らかに相関している。

得ることができる。具体的には  $(y_{it-2} - y_{it-3})$  がそれぞれのラグ変数、 $y_{it-2}$ 、 $y_{it-3}$  が  $(y_{it-1} - y_{it-2})$  に対する操作変数として使われる<sup>4</sup>。

## 2.2 LSDV 推計のバイアス

Least Squares Dummy Variables Estimation (LSDV) はダイナミックパネルデータの下では不一致推計となることを示す。<sup>5</sup>

$$y_{it} = \gamma y_{it-1} + \alpha_i^* + u_{it} \\ |\gamma| < 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

ここで

$$\alpha_i^* = \alpha_i + \mu, \quad \Sigma \alpha_i = 0, \quad E(u_{it}) = 0, \quad E(u_{it}U_{js}) = \sigma_u^2 \quad (i = j \text{ かつ } t = s \text{ の場合}) \\ \text{and } E(u_{it}U_{js}) = 0 \quad (i \neq j \text{ かつ } t \neq s \text{ の場合}) \quad (5)$$

$\bar{y}_i = \sum_{t=1}^T y_{it}/T$ ,  $\bar{y}_{i,-1} = \sum_{t=1}^T y_{i,t-1}/T$ ,  $\bar{u}_i = \sum_{t=1}^T u_{it}/T$  とすると、LSDV 推計は次のようになる。

$$\alpha_i^* = \bar{y}_i - \hat{\gamma}_{LSDV} \bar{y}_{i,-1} \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

$$\hat{\gamma}_{LSDV} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{it} - \bar{y}_i)(y_{i,t-1} - \bar{y}_{i,-1})}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{i,t-1} - \bar{y}_{i,-1})^2} \\ = \gamma + \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{i,t-1} - \bar{y}_{i,-1})(u_{it} - \bar{u}_i)/NT}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{i,t-1} - \bar{y}_{i,-1})^2/NT} \quad (7)$$

(7) の右辺の第 2 項がゼロに収束しなければ  $\hat{\gamma}_{LSDV}$  は  $\gamma$  とは一致しない。

(4) 式を過去のデータについて代入していくと次のようになる。

$$y_{it} = u_{it} + \gamma u_{i,t-1} + \dots + \gamma^{t-1} u_{i1} + \frac{1 - \gamma^t}{1 - \gamma} \alpha_i^* + \gamma^t y_{i0} \quad (8)$$

$y_{i,t-1}$  を  $t$  について集計すると

$$\sum_{t=1}^T y_{i,t-1} = \frac{1 - \gamma^T}{1 - \gamma} y_{i0} + \frac{(T-1) - T\gamma + \gamma^T}{(1 - \gamma)^2} \alpha_i^* + \frac{1 - \gamma^{T-1}}{1 - \gamma} u_{i1} + \frac{1 - \gamma^T}{1 - \gamma} u_{i2} + \dots + u_{iT-1} \quad (9)$$

$u_{it}$  は  $\alpha_i^*$  と無相関であり iid に従っているとすれば大数法則により  $N$  が無

<sup>4</sup>Arellano(1989) はラグ変数の水準  $y_{it-2}$  や  $y_{it-3}$  を操作変数として用いる方が望ましいとしている。

<sup>5</sup>Hsiao (2003), chap. 4, pp. 71-72 を引用している。

限大の時には (7) 式の右辺分子は次のように表せる。

$$\begin{aligned} & \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{i,t-1} - \bar{y}_{i,-1})(u_{it} - \bar{u}_i) \\ &= - \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{y}_{i,-1} \bar{u}_i \\ &= - \frac{\sigma_u^2}{T^2} \cdot \frac{(T-1) - T\gamma + \gamma^T}{(1-\gamma)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

同様に (7) 式の右辺分母は次のようになる。

$$\frac{\sigma_u^2}{1-\gamma^2} \left\{ 1 - \frac{1}{T} - \frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2} \frac{(T-1) - T\gamma + \gamma^T}{T^2} \right\} \quad (11)$$

$T$  が無限大になれば (10) はゼロに (11) は  $\sigma_u^2 / (1-\gamma^2)$  に収束し (7) は  $\hat{\gamma}_{LSDV} = \gamma$  となる。

$T$  が固定されていれば  $\gamma_{LSDV}$  のバイアスは次のように残る。

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} (\hat{\gamma}_{LSDV} - \gamma) = - \frac{1+\gamma}{T-1} \left( 1 - \frac{1}{T} \frac{1-\gamma^T}{1-\gamma} \right) \left\{ 1 - \frac{2\gamma}{(1-\gamma)(T-1)} \left[ 1 - \frac{1-\gamma^T}{T(1-\gamma)} \right] \right\}^{-1} \quad (12)$$

$T$  が小さければバイアスは無視できない。

### 2.3 OLS 推計のバイアス

次のようなモデルを考え、OLS 推計のバイアスを示す。<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} y_{it} &= \gamma y_{i,t-1} + \alpha_i + u_{it} \\ |\gamma| &< 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (13)$$

OLS 推計は次のようになる。

$$\hat{\gamma}_{OLS} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{it} \cdot y_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{it-1}^2} = \gamma + \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\alpha_i + u_{it}) y_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{it-1}^2} \quad (14)$$

(14) 式右辺第 2 項の限界確率を計算する。分子については次のようになる。

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\alpha_i + u_{it}) y_{i,t-1} = \frac{1}{T} \frac{1-\gamma^T}{1-\gamma} \text{cov}(y_{i0}, \alpha_i) + \frac{1}{T} \frac{\sigma_\alpha^2}{(1-\gamma)^2} [(T-1) - T\gamma + \gamma^T] \quad (15)$$

<sup>6</sup>Hsiao (2003), chap. 4, pp.73-74 を引用している。

分母については次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{i,t-1}^2 &= \frac{1 - \gamma^{2T}}{T(1 - \gamma)^2} \frac{\sum_{i=1}^N y_{i0}^2}{N} + \frac{\sigma_\alpha^2}{(1 - \gamma)^2} \frac{1}{T} \left( T - 2 \frac{1 - \gamma^T}{1 - \gamma} + \frac{1 - \gamma^{2T}}{1 - \gamma^2} \right) \\ &+ \frac{2}{T(1 - \gamma)} \left( \frac{1 - \gamma^T}{1 - \gamma} - \frac{1 - \gamma^{2T}}{1 - \gamma^2} \right) \text{cov}(\alpha_i, y_{i0}) \\ &+ \frac{\sigma_u^2}{T(1 - \gamma^2)^2} [(T - 1) - T\gamma^2 + \gamma^{2T}] \end{aligned} \quad (16)$$

$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N y_{i0}^2 / N$  は有限で  $\text{cov}(\alpha_i, y_{i0})$  はゼロか正の値をとる。一般には  $N$  か  $T$  が無限になる場合には  $\hat{\gamma}_{OLS}$  推計 (15) の右辺第 2 項は正の値をとり真の値  $\gamma$  を過剰推計してしまうことになる。

(3) を操作変数法で推計するアプローチに対して、Arellano and Bond (1991)、Ahn and Schmidt (1995) は操作変数法は重要な情報を用いていないので、有効でないと論じている。例えば、一階の階差モデルを想定すると、2 期ラグをとった  $y$  の水準は攪乱項の階差とは無相関であることを示すことができる<sup>7</sup>。

$$E[y_{is}, (\nu_{it} - \nu_{i,t-1})] = 0, \quad s = 0, 1, \dots, t-2, \quad t = 2, \dots, T \quad (17)$$

これに対応した一般化積率法 (GMM) は次のように表せる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{is} [(y_{it} - y_{i,t-1}) - (x_{it} - x_{i,t-1})' \beta - \delta(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})] &= 0 \quad (18) \\ s = 0, \dots, t-2, \quad t = 2, \dots, T \end{aligned}$$

Ahn and Schmidt(1995) は  $y$  の水準からだけではなく、 $y$  と攪乱項の階差 ( $\nu_{it} - \nu_{i,t-1}$ ) との間からも重要な情報 (ここでは直交条件) が得られることを示している。これは次のように表せる。

$$E[y_{is}(\nu_{i,s+1} - \nu_{is}) - y_{is+1}(\nu_{i,s+2} - \nu_{i,s+1})] = 0 \quad (19)$$

$$E[(y_{it} - x_{it}' \beta)y_{it} - (y_{i,t-1} - x_{i,t-1}' \beta)y_{i,t-1}] = 0 \quad (20)$$

$$t = 2, \dots, T$$

ダイナミック・パネル推定に関する操作変数法と一般化積率法を巡る論争は、現在最も活発に行われており、いまだに決着はついていない。例えば、Binder, Hsiao, and Pesaran (2000)、Hsiao, Pesaran and Tahmiscioglu (2002)、Hsiao (2002) などでは、理論的に直交条件を加えることで GMM 推定の有効性を増

<sup>7</sup>すなわち直交条件 (orthogonality conditions) が成立する。これは Holtz-Eakin(1988)、Holtz-Eakin, Newey and Rosen(1988) によって指摘された。

すことはありうるが、有限サンプルの下ではあまりに多くの直交条件を課すことには問題があり、実証的には下方バイアスが増すと論じている。また、操作変数法と GMM 推定に関するモンテカルロ実験 (T=5、N=50、2500 回反復) の結果、最尤法は 1 % 下方バイアスがあり、GMM は場合によっては 15 - 20 % の下方バイアスが見られる。操作変数法にもバイアスは見られるが GMM と比べると小さいことが示されている。

Hsiao, Pesaran and Tahmiscioglu (2002) や Fujiki, Hsiao and Shen (2002) で代替的に彼らが提示している推定方法は最小距離推定法 (Minimum Distance Estimation: MDE) と呼ばれるものである<sup>8</sup>。基本的な考え方は、誤差項の階差 2 次式を最小化するようにパラメータ ( $\beta, \delta$ ) を決定するということである。すなわち、

$$\min \left[ \sum_{i=1}^N \Delta \nu_i^* \Omega^{-1} \Delta \nu_i^* \right] \quad (21)$$

ここで  $\Omega$  は  $\Delta \nu_i^*$  の共分散行列、 $\Delta \nu_i^* = [\Delta y_{i1} - \beta \Delta x_{i1} - \delta \Delta y_{i0}, \Delta y_{i2} - \beta \Delta x_{i2} - \delta \Delta y_{i1}, \dots]$

この方法は有効ではないが、 $N$  が大きければ漸近的に一致推定となる。しかも計算ははるかに簡単になる。モンテカルロ実験の結果でも、MDE 推定のバイアスは少なくとも GMM 推定より小さい。推定値の平均平方誤差で比べても、MDE 推定は最尤法よりは大きい、GMM 推定より小さい。Hahn, Hausman and Kuersteiner (2002) は階差の取り方を 1 階ではなく例えば 3 階 (すなわち、 $y_n - y_{n-3}$ ) のような長階差 (long differences; LD) をとる事で操作変数の説明力を高め、バイアスを引き下げ、結果として最小距離 (MDE) を縮めることができると論じている。

同時に、Arellano and Bond (1991)、Kiviet (1995)、Ziliak (1997)、Blundell and Bond (1998)、Alonso-Borrego and Arellano (1999) は GMM 推定に関してモンテカルロ実験を行い、一回階差の誤差に対するモーメント条件を用いた GMM 推定は、識別制約が弱く、しかもクロスセクション方向のサンプルサイズ  $N$  に対して相対的にモーメント条件が多すぎる場合には、バイアスが大きいことを確認している。とはいえ、Blundell, Bond and Windmeijer (2000) は「データの厳密な検証と GMM 推定の制約条件の適切な選択によってダイナミック・パネル・データに関する GMM 推定の問題は回避できる」だろうと主張している。

## 2.4 パネル単位根推定

近年の時系列分析の中では変数の定常性が重要な問題となっており、それを検定するための様々なテストが考案されている。パネルデータが非定常な変数である場合にも spurious 推定の問題が出てくる。

<sup>8</sup>MDE の詳細については Lee (2002, Chap3) を参照。

パネルデータは一般にクロスセクション方向に膨大なサンプルがあるために、時系列だけではサンプル数が不足して検定テストの精度が落ちるといった問題を回避できると考えられている。しかし、時系列の帰無仮説、対立仮説とパネル単位根検定とは異なっている。以下ではいくつかの検定を紹介したい。

最もよく知られた検定は Levin-Lin (LL) test(1992,1993) であるが、他にも Im-Pesaran-Shin (IPS) test(1997)、Maddala-Wu (MW) test (1999) などが提案されている。

次のようなモデルを考えよう。

$$y_{it} = \rho y_{it-1} + e_{it} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

一般に第 1 主体の単位根を検定する場合、 $t$  値による単位根検定は次のように定義される。

$$H_0 : \rho_1 = 1 \quad vs \quad H_1 : \rho_1 < 1 \quad (23)$$

このようなテストの検定力は低いので、Levin-Lin (LL) test では次のような検定を提示した。

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_N = \rho = 1 \quad vs \quad H_1 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_N = \rho < 1 \quad (24)$$

これら 2 つの検定は帰無仮説も対立仮説も異なっており、代替的な検定とは言えない。O'Connell(1998) は、Levin-Lin test は同時点のクロスセクション内での誤差相関が推定上、大きな歪みを与えていることを指摘し、そのような誤差因子をコントロールする必要性を主張している。Im-Pesaran-Shin (IPS) test は次のような検定を提案し、Levin-Lin test の一般化であると主張している。

$$H_0 : \rho_i = 1 \text{ for all } i \quad vs \quad H_1 : \rho_i < 1 \text{ at least one } i$$

しかし Maddala (2001, p.554) で指摘されているように、これは  $N$  個の単位根検定を個別に行っていることと同値であり、Levin-Lin test はすべての主体に対して単位根があるという複合仮説を検定していることになる。

それぞれの単位根検定が Augmented Dickey-Fuller test によって同じラグ構造の下で検定されているとすれば、 $N$  主体それぞれの  $t$  統計は平均  $M$  で分散  $\sigma^2$  の分布に従い、 $t$  統計全体の平均  $\bar{t}$  は平均  $M$ 、分散  $\sigma^2/N$  の分布に従う。Maddala-Wu test は  $N$  主体の独立した単位根検定を集計して検定するというもので、個別検定を集計して検定するという Ronald A. Fisher (1973a) のアイデアを応用したものである。すなわち、 $P_i$  を  $i$  主体の単位根検定の有意

水準に関する  $P$  値とすると、 $\lambda = -2\sum_{i=1}^N \log_e P_i$  は自由度  $2N$  の  $\chi^2$  分布に従うことから、 $N$  主体単位根検定の全体的な検定はカイ二乗検定 ( $P_\lambda$  test) により行うというものである。Maddala and Wu (1999) のブートストラップ実験によれば、Fisher 流のカイ二乗検定が定常性テストとしても共和分テストとしても最もパフォーマンスが良いとしている。Choi(1999a) は Fisher 検定をさらに拡張して、他の検定に対して Fisher 検定が優位にあることを、より厳密に示した。

## 参考文献

- Ahn, S.C. and Schmidt, P. (1995) "Efficient Estimation of Models for Dynamic Panel Data", *Journal of Econometrics*, 68, pp.5-28.
- Alonso-Borrego, C. and Arellano, M. (1999) "Symmetrically Normalized Instrumental-variable Estimation Using Panel Data", *Journal of Business and Economic Statistics*, 17, pp.36-49.
- Anderson, T.W. and Hsiao, C. (1981) "Estimation of Dynamic Models with Error Components," *Journal of the American Statistical Association*, 76, pp.598-606.
- Arellano, M. (1989) "A Note on the Anderson-Hsiao Estimator for Panel Data," *Economics Letters*, 31, pp.337-341.
- Arellano, M. and Bond, S. (1991) "Some Tests of Specification for Panel Data: Monte Carlo Evidence and an Application to Employment Equations," *Review of Economic Studies*, 58, pp.277-297.
- Arellano, M. and Bover, O. (1995) "Another Look at the Instrumental Variable Estimation of Error-components Models," *Journal of Econometrics*, 68, pp.29-52.
- Binder, M., C. Hsiao and M.H. Pesaran (2000) "Estimation and Inference in Short Panel Vector Autoregression with Unit Roots and Cointegration," mimeo.
- Blundell, R. and Bond, S. (1998) "Initial Conditions and Moment Restrictions in Dynamic Panel Data Models," *Journal of Econometrics*, 87, pp.115-143.
- Blundell, R., S. Bond and F. Windmeijer (2000) "Estimation in Dynamic Panel Data Models: Improving on the Performance of the Standard GMM Estimator," *Advances in Econometrics* 15, pp.53-91.
- Fisher, R.A.(1973a) *Statistical Methods for Research Workers*, 14th ed, New York: Hafner Publishing.
- Fujiki, H., C. Hsiao, and Y. Shen.(2002) "Is There a Stable Money Demand Function under the Low Interest Rate Policy? A Panel Data Analysis", *Monetary and Economic Studies*, 20(2), pp.1-23.
- Hahn, J., Hausman, J. and Kuersteiner G.(2002) "Bias Corrected Instrumental Variables Estimation for Dynamic Panel Models with Fixed Effects", MIT, mimeo.

Holtz-Eakin, D. (1988) "Testing for Individual Effects in Autoregressive Models", *Journal of Econometrics*, 39, pp.297-307.

Holtz-Eakin, D., Newey, W. and Rosen, H.S. (1988) "Estimating Vector Autoregressions with Panel Data," *Econometrica*, 56, pp.1371-1395.

Hsiao, C. (2003) *Analysis of Panel Data* 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

Hsiao, C., M.H. Pesaran and A.K. Tahmiscioglu (2002) "Maximum Likelihood Estimation of Fixed Effects Dynamic Panel Data Models Covering Short Time Periods," *Journal of Econometrics*, 109, pp.107-150.

Im, K., M.H. Pesaran and Y. Shin (1997) "Testing for Unit Roots in Heterogeneous Panels," manuscript, Department of Applied Economics, University of Cambridge.

Kiviet, J.F. (1995) "On Bias, Inconsistency and Efficiency of Some Estimators in Dynamic Panel Data Models," *Journal of Econometrics*, 68, pp.53-78.

Lee, M.J. (2002) *Panel Data Econometrics: Methods-of-Moments and Limited Dependent Variables*, San Diego: Academic Press.

Levin, A. and C.F. Lin (1992) "Unit Root Test in Panel Data: Asymptotic and Finite Sample Properties," Discussion Paper #92-93 (University of California at San Diego).

Levin, A. and C.F. Lin (1993) "Unit Root Test in Panel Data: New Results," Discussion Paper #93-56 (University of California at San Diego).

Maddala, G.S. (2001) *Introduction to Econometrics*, 3rd ed, New York: John Wiley & Sons.

Maddala, G.S. and Wu, S. (1999) "A Comparative Study of Unit Root Tests with Panel Data and a New Simple Test", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 61, pp.631-652.

O'Connell, P.G.J. (1998) "The Overvaluation of Purchasing Power Parity," *Journal of International Economics*, 44, pp.1-19.