資産価格の実証分析／金融経済論 II

Lecture 10: GMMによる資産価格モデルの推定

December 2008

祝迫得夫

iwaisako@ier.hit-u.ac.jp

消費資産価格モデル

- オイラー方程式から導出された条件：

$$1 = E_t\left[m_{t+1} \cdot R_{i,t+1}\right] = E_t\left[\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma} \cdot R_{i,t+1}\right] = E_t\left[\delta CG_{t+1}^{-\gamma} \cdot R_{i,t+1}\right]$$

- $\gamma > 0$ なら、消費の成長率 $(CG_{t+1} \equiv C_{t+1}/C_t)$ が高いときには，SDFの値 (m_{t+1}) は低くなる．平均的には，消費の成長率が高いとき（景気が良い時？）には、$R_{i,t+1}$ は上昇しなければならない.

- この式を非線形推定（GMM）することで，パラメーター $\{\gamma, \delta\}$ を直接推定することができる.

Enter GMM

- GMM（一般化積率法）：Hansen (1982, Econometrica)
- モーメント条件: $Ef(x_t, \beta_0) = 0$
- データ上の対応物: $g_T(\beta_0) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(x_t, \beta_0)$
- 推定値 $b_T = \arg\min_{\beta} g_T(\beta_0) V g_T(\beta_0)$
- ただし V はウェイトづけ行列（正則行列）
- 一般的な問題点
  - 何をVとして選ぶか？
  - 小標本でのパフォーマンス

ファイナンスへのGMMの応用

- $p_t = E(m_{t+1}X_{t+1}|\mathcal{F}_t)$
  - p_t= 資産価格，　X_{t+1}= 次の期のペイオフ，　m_t=SDF
  - $m_t = g(y_t, \beta_0)$ とする
- モーメント条件:
  $E[m_{t+1}X_{t+1} - p_t] = E[g(y_t, \beta_0)X_{t+1} - p_t] = 0$
  あるいは $E[m_{t+1}R_{t+1} - 1] = 0$
- $f(x_t, \beta_0) = g(y_t, \beta_0)X_{t+1} - p_t$

- Hansen and Singleton (1982):

$$u_t(b) \equiv \delta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} R_{j,t+1} - 1 \qquad g_T \equiv T^{-1} \sum_{t=1}^{T} u_t \tag{1}$$

$g_T(b) = 0$ になる $\hat{b}$ を推定する．すなわち以下の問題を解く：

$$g_T = \arg\min_b Q(b) \qquad \text{where } Q(b) = g_T(b) W_T g_T(b) \tag{2}$$

ただしウェイトづけ行列 W_T，正則な対称行列

推定量の分布と標準誤差

1. 推定量の誤差は正規分布になる

$$\sqrt{T}\left(\hat{b} - b_0\right) \Longrightarrow N(0, V) \tag{3}$$

$$\text{where } V = [d\prime W_T d]^{-1} d\prime W_T S W_T d [d\prime W_T d]^{-1} \tag{4}$$

$$\text{and } S = Var\left[\sqrt{T} g_T(b_0)\right] \tag{5}$$

$$\text{and } d = \frac{\partial g_T(b_0)}{\partial b} \tag{6}$$

2. W_T の選択： $W_T = S^{-1}$ を選ぶ.

$$\Longrightarrow V = [d\prime W_T d]^{-1} \tag{7}$$

3. もしモデルが正しければ，推定値$\hat{b}$において評価されたモーメント$g_T(b)$はゼロに非常に近くなる．したがって$Q(b)$もゼロに非常に近くなる．モーメント条件がゼロに等しいという帰無仮説は，以下の「HanesnのJ-test」もしくは「過剰識別検定」と呼ばれる統計量を計算することでテストすることができる．

$$TJ_T = TVar\left[g_T(b)'\,\widehat{S}^{-1}g_T(b)'\right] \tag{8}$$

ただし$\widehat{S}^{-1}$はSの一致推定量．帰無仮説のもとではTJ_Tは漸近的に，自由度$(N-p)$のカイ二乗分布に従う．

- – Nはモーメント条件の数，pは推定されるパラーメータの数．
  – したがって上記の消費CAPMの例では，$p = 2(\beta$と$\gamma)$，Nは推定に使う資産の数になる．
  – TJ_Tがカイ二乗分布の95％分位を超えるならば，5% 水準で帰無仮説を棄却する．

なぜGMMは「素晴らしい」のか？

- なぜCochrane等は，SDF表現をGMMで推定するという方法論を好むのか？

- シンプルである：問題をSDF表現の形で特定し，モーメント条件$g_T(b)$を作る．$Q(b)$を数値的に最小化することで$\hat{b}$を求め，さらに何らかの方法でその標準誤差を計算する．
  – 消費CAPMの例：GMMのではなく最尤法（maximum likelihood）を用いるとしたら，(1) 消費と; (2) 資産収益率の確率過程のモデルを特定し，(3) 両者の同時分布を特定化する必要がある．GMMならこれを1ステップで済ませられる．

- 資産価格モデルの推定は，多くの場合2ステップで行われる（Fama-MacBeth）．しかし第1ステップの推定誤差が，第2ステップの推定誤差に与える影響はさほど明らかではない．GMMによるSDF表現の推定はこの問題を回避できる．

OLS推定はGMMと同じである

- 線形回帰式：

$$y_t = x_t'\beta + \epsilon_t \tag{9}$$
$$E(\epsilon_t|x_t) = 0 \Longrightarrow E(x_t\epsilon_t) = 0 \tag{10}$$

- $g_T(b) \equiv T^{-1}\sum_{t=1}^{T} u_t \quad u_t = x_t\epsilon_t(b) = x_t(y_t - x_t'\beta)$
- β は p 次元であり，したがって $g_T(b)$ も p 次元．したがって，ウェイトづけ行列 W_T の選択は推定量に関係なく，$g_T(b) = 0$ について解くことができる．
- $0 = \sum x_t(y_t - x_t'\hat{\beta}) \Longrightarrow \hat{\beta} = \left(\sum x_t x_t'\right)^{-1}\left(\sum x_t y_t\right)$
  これはOLS推定量に一致する

最尤法による推定はGMMと同じである

- 尤度関数を次のように特定化する

$$L(b) = \sum \log f_t(x_t, b) \tag{11}$$

ただし $f_t(x_t, b)$ は x_t の密度関数である

- 最尤推定量は次の性質を満たす: $T^{-1}\sum\left(\partial \log f_t(x_t, \hat{b})/\partial b\right) = 0$
- $u_t = \partial \log f_t(x_t, \hat{b})/\partial b$ とすれば，これはGMMの枠組みに収まる問題である．
  - Score identityから，$E\left[\partial \log f_t(x_t, \hat{b})/\partial b\right] = 0$

なぜGMM推定量は正規分布に従うのか？

1. $Q(b)$ の b に関する微分を計算する
   $\frac{\partial Q(b)}{\partial b} = 2\left[\frac{\partial g_T(b)}{\partial b}\right]' W_T g_T(b)$
   (2) 式が最小化されている場合には，$0 = \left[\frac{\partial g_T(b)}{\partial b}\right]' W_T g_T(b)$

2. モーメント条件をテイラー近似する
   $\sqrt{T} g_T(\hat{b}) = \sqrt{T} g_T(b_0) + \frac{\partial g_T(b_0)}{\partial b}\left(\widehat{b} - b_0\right) + o_p(1)$

3. もし $\widehat{b} \xrightarrow{p} b_0$ ならば，$\frac{\partial g_T(\hat{b})}{\partial b} \xrightarrow{p} \frac{\partial g_T(b_0)}{\partial b} \equiv d$．したがって，
   $0 = \left[\frac{\partial g_T(b)}{\partial b}\right]' W_T g_T(b) \approx d' W_T\left[\sqrt{T} g_T(b_0) + d\left(\widehat{b} - b_0\right)\right]$
   $\Rightarrow \sqrt{T}\left(\widehat{b} - b_0\right) = [-d' W_T d]^{-1}\left[d' W_T \sqrt{T} g_T(b_0)\right]$

4. 中心極限定理により
   $\sqrt{T} g_T(b_0) = T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T} u_t(b) \xrightarrow{d} N(0, S)$
   これは $\sqrt{T}\left(\widehat{b} - b_0\right) \xrightarrow{d} N(0, V)$ が成立することを意味する．

   ただし，
   $V = Var\left\{[-d' W_T d]^{-1}\left[d' W_T \sqrt{T} g_T(b_0)\right]\right\}$
   $= [d' W_T d]^{-1}\left[d' W_T Var\left\{\sqrt{T} g_T(b_0)\right\} W_T' d\right][d' W_T d]^{-1}$
   $= [d' W_T d]^{-1}[d' W_T S W_T' d][d' W_T d]^{-1}$

ウェイトづけ行列の選択

- 原則論：どのような positive definite な対称行列でも一致推定量であり，漸近的には正規分布に従う．
- $W_T = \hat{S}^{-1}$ を選ぶと，$Var(\hat{b})$ は最小になることを証明できる．したがって，$W_T = \hat{S}^{-1}$ が一番ポピュラーな選択である．
- より立ち入った議論については Cochrane 参照のこと

GMM 推定量の標準誤差の計算

- 消費 CAPM の例： $se(\hat{\gamma}) = \sqrt{Var(\hat{\gamma})} \quad H_0 : \gamma = a \quad t = \frac{\hat{\gamma}-a}{se(\hat{\gamma})}$

$$Var(\hat{b}) = Var\begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Var(\hat{\gamma}) & Cov(\hat{\gamma},\hat{\beta}) \\ Cov(\hat{\gamma},\hat{\beta}) & Var(\hat{\beta}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S &= Var\left[\sqrt{T}g_T(b_0)\right] = TE\left[g_T(b_0)\right]^2 \\ &= TE\left[\sum_{t=1}^{T} u_t(b_0)\right]^2 = T\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{T} Eu_t(b_0)u_j(b_0)'\right]^2 \\ &= T\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} Eu_t(b_0)u_{t-j}(b_0)'\right] \end{aligned}$$

- 誤差について，異時点間の独立性を仮定できるなら：

$$\begin{aligned} S &= T\left[Eu_t(b_0)u_{t-j}(b_0)'\right] \\ \hat{S} &= T^{-1}\left[\sum_t u_t(\hat{b})u_t(\hat{b})'\right] \end{aligned}$$

資産収益率は多くの場合，異時点間での相関が極端に小さいので，資産価格モデルの推定ではこれでほぼ構わない．

- 異時点間の独立性を仮定できない場合（See Hamilton, Chapter 10）

$$Eu_t(b_0)u_{t-j}(b_0)' \approx \hat{C}_j = T^{-1}\sum_{t=j+1}^{T} Eu_t(\hat{b})u_{t-j}(\hat{b})'$$

- $|j|$ が十分に大きければ，$Eu_t(\hat{b})u_{t-j}(\hat{b})' = 0$ であることを仮定する（共分散定常）.

$$\hat{S} = \sum_{j=-k}^{k} \hat{C}_j \quad \text{or} \quad \hat{S} = \sum_{j=-k}^{k} \varpi(j)\hat{C}_j$$

- Andrews 他：$\varpi(j)$ を $|j|$ にしたがって加重することで，より良い $\hat{S}$ を求めることができる.
- 例： Newey-West 推定量

$$\varpi(j) = \frac{k-|j|}{k}$$

- Hansen and Singleton (1982) once again:

$$u_t(b) \equiv \delta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma} R_{j,t+1} - 1 \qquad g_T \equiv T^{-1}\sum_{t=1}^{T} u_t \tag{12}$$

- 実際の推定結果は極めてパフォーマンスが悪い．特に γ の推定値が極端に高い値になってしまう.
- その後の資産価格モデルの実証に多大な影響.

Hansen and Singleton の簡便法

- Hansen 達に従って，消費と資産価格が，分散が均一（homosckedatic）の条件付きの二変数対数正規分布に従うと仮定すると前頁の式は，

$$0 = \mathrm{E}_t[r^i_{t+1}] + \log\delta - \gamma \mathrm{E}_t[\Delta c_t] + \frac{1}{2}[\sigma_i^2 + \gamma^2\sigma_c^2 - 2\gamma\sigma_{i,c}] \tag{13}$$

と書きかえられる．ただし，$c_{t+1} = \ln(C_t)$ であり，

  - $\Delta c_{t+1} = c_{t+1} - c_t$　（消費の成長率）
  - $\sigma_i^2 = Var(r^i_{t+1})$　（資産 i の収益率の分散）
  - $\sigma_c^2 = Var(\Delta c_t)$　（消費の成長率の分散）
  - $\sigma_{i,c} = Cov(r^i_{t+1}, \Delta c_t)$　（資産収益率と消費の成長率の共分散）

- (13) 式が，任意の危険資産と安全資産（r^f_{t+1}）について成り立つことを用いて，超過収益率の平均と分散を用いた関係に書き直すと，

$$\mathrm{E}_t[er^i_{t+1}] + \frac{\sigma(er^i)^2}{2} = \gamma\cdot\sigma(er^i, \Delta c_t) \tag{14}$$

ただし $er^i_t \equiv r^i_t - r^f_t$.

- 相対的危険回避度 γ の推定値は

(a)　危険資産の超過収益率の期待値：　$\mathrm{E}_t[er_t]$
(b)　消費と株式超過収益率の共分散：　$\sigma_{er,c}$　$(= \sigma(er^i, c))$

という 2 つの変数に依存する．

- さらに (b) は $\sigma_{er,c} = \sigma_{er}\cdot\sigma_c\cdot\rho_{er,c}$ より

(b)-1　株式超過収益率の分散：　σ_{er}
(b)-2　消費の成長率の分散：　σ_c
(b)-3　消費と株式超過収益率の相関係数：　$\rho_{er,c}$

という，三つの要素に分解して考えることができる．

モデルのインプリケーション：修正

- CG_t が高いときには m_t は低くなる $(\Delta c_t = \ln(CG_t))$．平均的に (1)／(13) 式が，すべての資産について成り立つためには，消費との共分散が大きい資産は期待超過収益率が高くなければならない．

- Lucas の果樹園経済モデル
  - 家計がすべての所得を配当から得ていると考える．
  - 配当は $d_t = \alpha P_{m,t}$ で決定されているものとする（$P_{m,t}$ は市場の株価総額，α は一定）．
  - したがって $\Delta c_t = r_{m,t}$．消費資産価格モデルと CAPM は同じになる．
  - インプリケーションも同じ：マーケットとの共分散が大きい個別資産の期待超過収益率は，高くなければならない．

消費資産価格モデルの実証

- Mehra and Prescott (1985)：「妥当なリスク回避度を前提とすると、株式のリスク・プレミアムが高過ぎる」$\rightarrow$株式プレミアム・パズル

- 日本でもアメリカでも、実証分析は上手く行っていない
  - パラメーター $\{\gamma, \delta\}$ の推定値の妥当性
    羽森「日本は上手くいっている」
  - 株式収益率の説明能力は低い（祝迫、Nakano-Saito ほか）

- 様々な理論モデルの提案
  - 効用関数の一般化（習慣形成モデルほか）
  - 集計の問題（株式保有の偏り）
  - 不完備市場（労働所得リスク）

TABLE I

INSTRUMENTAL VARIABLE ESTIMATES FOR THE PERIOD 1959:2–1978:12

Cons	Return	NLAG	$\hat{\alpha}$	$\widehat{\mathrm{SE}}(\hat{\alpha})$	$\hat{\beta}$	$\widehat{\mathrm{SE}}(\hat{\beta})$	χ^2	DF	Prob
NDS	EWR	1	−.9457	.3355	.9931	.0031	4.9994	1	.9746
NDS	EWR	2	−.9281	.2729	.9929	.0031	7.5530	3	.9438
NDS	EWR	4	−.7895	.2527	.9925	.0031	9.1429	7	.7574
NDS	EWR	6	−.8927	.2138	.9934	.0030	15.726	11	.8484
NDS	VWR	1	−.9001	.3130	.9979	.0025	1.1547	1	.7174
NDS	VWR	2	−.8133	.2298	.9981	.0025	3.2654	3	.6475
NDS	VWR	4	−.6795	.1855	.9973	.0024	6.3527	7	.5008
NDS	VWR	6	−.7958	.1763	.9980	.0023	14.179	11	.7767
ND	EWR	1	−.9737	.1245	.9922	.0031	5.9697	1	.9854
ND	EWR	2	−.9664	.1074	.9919	.0031	8.9016	3	.9694
ND	EWR	4	−.9046	.0926	.9918	.0031	11.084	7	.8650
ND	EWR	6	−.9466	.0793	.9422	.0030	15.663	11	.8459
ND	VWR	1	−.8985	.1057	.9971	.0025	1.5415	1	.8756
ND	VWR	2	−.8757	.0856	.9974	.0025	3.2654	3	.6475
ND	VWR	4	−.8174	.0742	.9967	.0024	7.8776	7	.5008
ND	VWR	6	−.8514	.0629	.9973	.0024	14.938	11	.8147

The estimates of α range from $-.95$ to $-.68$ when ND is used as the measure of consumption, and from $-.97$ to $-.82$ when ND is used as the measure of consumption. The estimated standard errors for α, $\widehat{\mathrm{SE}}(\hat{\alpha})$, are smaller when consumption is measured as ND than when consumption is measured as NDS. As expected, all of the estimates of β exceed .99 but are less than unity. The chi-square tests are also displayed in Table I, where the number of overidentifying restrictions is indicated by DF and Prob is the probability that a $\chi^2(\mathrm{DF})$ random variate is less than the computed value of the test statistic under the hypothesis that the restrictions (3.1) are satisfied. These tests provide greater evidence against the model when EWR is included as the return, and when the instrument vector is formed from a small number of lagged values of x.

For comparison, we present some results in Table II from estimating α and β using the method of maximum likelihood under the assumption that x is lognormally distributed. They were obtained using the procedure described in Section 4 assuming that log x has a sixth-order vector autoregressive representation. The corresponding estimates of α and β from the two methods of estimation are similar. However, the estimated standard errors of α and β from the instrumental variables procedure are smaller than the corresponding standard errors from the maximum likelihood procedure.[13] Three possible explanations for this result are that the asymptotic standard errors are being estimated imprecisely, the economic model of stock returns is misspecified, or the auxiliary assumptions underlying the maximum likelihood procedure are incorrect. The maximum likelihood procedure assumes that x is lognormally distributed and that the lag length specification of the vector autoregression is correct. Since the

[13] Analytical differentiation, as opposed to numerical differentiation, was used to calculate the standard errors.

TABLE 5

THE EQUITY PREMIUM PUZZLE

Country	Sample Period	$\overline{aer_e}$	$\sigma(er_e)$	$\sigma(m)$	$\sigma(\Delta c)$	$\rho(er_e, \Delta c)$	$cov(er_e, \Delta c)$	RRA(1)	RRA(2)
USA	1947.2 - 1996.3	7.852	15.218	51.597	1.084	0.193	3.185	246.556	47.600
AUL	1970.1 - 1996.2	3.531	23.194	15.221	2.142	0.156	7.725	45.704	7.107
CAN	1970.1 - 1996.2	3.040	16.673	18.233	2.034	0.159	5.387	56.434	8.965
FR	1973.2 - 1996.2	7.122	22.844	31.175	2.130	-0.047	-2.295	< 0	14.634
GER	1978.4 - 1996.2	6.774	20.373	33.251	2.495	0.039	1.974	343.133	13.327
ITA	1971.2 - 1995.2	2.166	27.346	7.920	1.684	0.002	0.088	2465.323	4.703
JAP	1970.2 - 1996.2	6.831	21.603	31.621	2.353	0.100	5.093	134.118	13.440
NTH	1977.2 - 1996.1	9.943	15.632	63.607	2.654	0.023	0.946	1050.925	23.970
SWD	1970.1 - 1994.4	9.343	23.541	39.688	1.917	0.003	0.129	7215.176	20.705
SWT	1982.2 - 1996.2	12.393	20.466	60.553	2.261	-0.129	-5.978	< 0	26.785
UK	1970.1 - 1996.2	8.306	21.589	38.473	2.589	0.095	5.314	156.308	14.858
USA	1970.1 - 1996.3	5.817	16.995	34.228	0.919	0.248	3.875	150.136	37.255
SWD	1920 - 1993	6.000	18.906	31.737	5.723	0.169	9.141	65.642	11.091
UK	1919 - 1993	8.677	21.706	39.974	5.641	0.355	21.738	39.914	14.174
USA	1891 - 1994	6.258	18.534	33.767	6.515	0.497	30.001	20.861	10.366