資産価格モデルの実証分析／金融経済論 II

Lecture 8: CAPMとマルチファクター・モデル

November 2006
Last update: November 2008

祝迫得夫

iwaisako@ier.hit-u.ac.jp

資産価格モデルとSDF（復習）

- 無裁定条件が満たされている限り：
  - 理論的な基礎が異なっても，すべての資産価格モデルは，資産収益率がファクターに線形に依存する形で表現される.
  - どのような資産価格モデルに関しても，それに対応する確率割引ファクターが存在する（Cochrane および野口・藤井のテキストを参照）.
- $r^i = \beta_0^i + \beta_1^i \cdot f_1 + ... + \varepsilon^i$
  - ただし，$f_k (k = 1, ...K)$ は共通するリスク・ファクター
  - CAPM：$K = 1$ で，f_1 はマーケット・ポートフォリオ.
    $r^i = \beta_0^i + \beta_1^i \cdot R_m + \varepsilon^i$

- 金融資産 i の各状態 (s) におけるペイオフ： x_s^i
- 状態価格（Arrow-Debreu 証券の価格）: π_s
- 資産 i の価格は： $p^i = \pi_1 x_1^i + \pi_2 x_2^i + ... + \pi_S x_S^i$
- 状態 s の価格 π_s と，発生確率 θ_s の比率： $m_s = \pi_s / \theta_s$
  - $1 = \theta_1 m_1 R_1^i + \theta_2 m_2 R_2^i + ... + \theta_S m_S R_S^i = E[mR]$
  - 確率割引ファクター m は，状態価格/状態発生確率の比 m_s のベクトル.
- m は，市場が完備な場合以外は一般に複数存在する.
- 実証上の SDF，m_t は，T 個の観察値を持つ一変数の系列で（1 変数の確率過程の Sample Path），特定のファクターの線形関数.

資本資産価格モデル：CAPM

- 理論モデルのテスト＝前提条件のテスト
- CAPM の前提条件（From: Bodie, Kane and Marcus, INVESTMENTS, McGraw-Hill）

1. マーケットには多数の投資家がおり，個々の投資家の資産はマーケットの大きさに比較して十分に小さい．個々の投資家は，自分の取り引きは，マーケットでの資産の価格には影響を及ぼさないものとして行動する．すなわち，投資家は Price Taker である.
2. すべての投資家は，同じある一定の投資期間を持つ．その投資期間の期首に，期末の期待効用が最大になるようにポートフォリオを選択し，その後は投資期間の終わりまで資産の売買を一切行わない.

3. 投資家は，公に (Publicly) 取り引きされている金融資産だけを，資産として保有する．例えば，教育（人的資本）や個人保有の会社などの，公的には取り引きされない資産は考慮に入れない．

4. 取引きコストや，金融資産の取引・からの所得に関わる税金については，無視できるものとする（個々の投資家の間で，顕著な差はないものと仮定する）．

5. すべての投資家は合理的であり，収益と分散に関する最適化を行う．すなわち，マーコヴィッツ型のポートフォリオ選択を行う．

6. すべての投資家は，同質的な期待を持つ．すなわち，各資産の期待収益率と資産収益率の共分散行列に関して，同じ情報を利用し，同じ効率的ポートフォリオ・フロンティアを構築する．

モデルとしてのCAPMの問題点（１）

- CAPMの前提である平均=分散分析が正当化されるためには，以下のどちらかの前提が満たされる必要性がある

  （１）投資家が２次関数の効用関数を持つ
  ⇒より一般的な効用関数の近似？

  （２）資産収益率が多変数の正規分布に従う
  ⇒実際は正規分布より裾野の広い分布（ARCH効果）

モデルとしてのCAPMの問題点（２）

- Rollの批判:実際に観察されるmarketportfolio(S&P500, TOPIX)が，真のmarket portfolioである必然性はない
  ⇒人的資本や不動産などの他の資産を考慮する必要性

- 結局、CAPMの前提が厳密に成立していない事は明らかだが，十分に良い現実の近似であると言えるだろうか？

推定値と統計量

- 推定モデル

$$\mathbf{Z}_t = \alpha + \beta \mathbf{Z}_{mt} + \epsilon_t$$
$$\mathrm{E}\left[\epsilon_t\right] = 0, \qquad \mathrm{E}\left[\epsilon_t \epsilon_t'\right] = \Sigma$$

- 推定値

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\mu} - \widehat{\beta}\widehat{\mu}_m, \qquad \widehat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\mathbf{Z}_t - \widehat{\mu}\right)\left(\mathbf{Z}_{mt} - \widehat{\mu}_m\right)}{\sum_{t=1}^{T} (\mathbf{Z}_{mt} - \widehat{\mu}_m)^2}$$

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(\mathbf{Z}_t - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}\mathbf{Z}_{mt}\right)\left(\mathbf{Z}_t - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}\mathbf{Z}_{mt}\right)'$$

ただし

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{Z}_t, \qquad \widehat{\mu}_m = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{Z}_{mt}$$

- $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ の条件付分布

$$\widehat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \frac{1}{T}\left[1+\frac{\widehat{\mu}_m^2}{\widehat{\sigma}_m^2}\right]\Sigma\right), \qquad \widehat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\widehat{\sigma}_m^2}\right]\Sigma\right)$$

- 検定統計量

$$J_0 = \widehat{\alpha}\left[\mathrm{Var}\left[\widehat{\alpha}\right]\right]^{-1}\widehat{\alpha} = T\left[1+\frac{\widehat{\mu}_m^2}{\widehat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}\widehat{\alpha}\Sigma^{-1}\widehat{\alpha}$$

$$J_1 = \frac{(T-N-1)}{N}\left[1+\frac{\widehat{\mu}_m^2}{\widehat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}\widehat{\alpha}\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{\alpha}$$

  - J_0 は自由度 N のカイ二乗分布に従う．ただし，真の共分散行列 Σ を前提としている．
  - J_1 は分子の自由度が N，分母の自由度が $(T-N-1)$ の F 分布に従う．

- J_1 の解釈 (Gibbons, Ross, and Shanken, 1989)

$$J_1 = \frac{(T-N-1)}{N}\left[\frac{\left(\widehat{\mu}_q^2/\widehat{\sigma}_q^2\right)-\left(\widehat{\mu}_m^2/\widehat{\sigma}_m^2\right)}{1+\left(\widehat{\mu}_m^2/\widehat{\sigma}_m^2\right)}\right]^{-1}$$

  - ただし，q はデータから構成された事後的な接点ポートフォリオ.
  - 定義により q は効率的.
  - 詳細は CLM 第 5 章を参照.
  - 分子：(q のシャープ比 $)^2 -$ (m のシャープ比 $)^2$,　$m = q$ ならゼロ.
  - 分母：$1 +$ (m のシャープ比 $)^2$

- Roll の批判: Reprise
  - 「$\widehat{\alpha} = 0$」の検定は，market portfolio の平均分散の意味での効率性のテストと同値.
  - 任意のサンプル・データについて，事後的に効率的な接点ポートフォリオは必ず作成可能なので、事前に market portfolio がわかっていなければ，CAPM はテストできない.

線形ファクター・モデル

- 無条件の線形ファクター・モデル
  - 「条件付きモデル」についてはJagannatahn and Wang 等を参照
- $$E\left[R_t^i\right] = \gamma + \beta_i'\lambda \tag{1}$$
  ただしγはすべての資産に共通であり，β_iは個々の資産iのリスク・ファクターf_tに対する感応度をあらわす.
  - β_iは母集団のパラメータであり，定義により以下の通り.
    $$\beta_i = \frac{Cov(f_t, R_t^{ei})}{Var(f_t)}$$
  - 安全資産が存在するなら，(1)式は任意のリスク資産の超過収益率R_t^{ei}に関して「$E\left[R_t^{ei}\right] = \beta_i'\lambda$」が成立することを意味する.
  - λはファクターに関する“market price of risk”と呼ばれる.

線形ファクター・モデルの推定

- 通常は，まず以下のような式を推定する
  $$R_t^{ei} = \alpha_t + \beta_i' f_t + \epsilon_t^i \tag{2}$$
  $$\text{ただし } E\left[\epsilon_t^i | f_t\right] = 0$$

1. 実証上のインプリケーション：期待超過収益率（リスク・プレミアム）$E\left[R_t^{ei}\right] = E\left(R_t^i - R_t^f\right)$は，ファクターのリスクのみに依存する.
2. どのようにモデルを推定するか？ どのように$\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$等を計算するか？
3. どのようにパラメータ推定値の誤差を計算し，モデルをテストするか？

モデル1：CAPM

$$R_t^{ei} = \alpha_i + \beta_i R_t^{eM} + \epsilon_t^i \tag{3}$$

- $E\left[R_t^{ei}\right] = \beta_i' \lambda$ より，α_i はすべての資産についてゼロで無ければならない．
- λ はすべての資産に共通であり，$E(R_t^{eM})$ の market price of risk になる．すなわち，マーケット全体を保有していたとすると，λ だけの超過差収益率（リスク・プレミアム）を得る．

$$E(R_t^{ei}) = E(\alpha_i) + E(\beta_i R_t^{eM})$$

$E\left[R_t^{ei}\right] = \beta_i' \lambda$ and $\alpha_i = 0$ なので

$$E(R_t^{ei}) = \beta_i E(R_t^{eM}) = \beta_i' \lambda$$
$$\Rightarrow \lambda = E(R_t^{eM})$$

モデル2：マルチファクター・モデル（1）

$$R_t^{ei} = \alpha_i + \beta_i' f_t + \epsilon_t^i \tag{4}$$

- ただし，ファクターは資産／ポートフォリオのリターン．
- Fama=French なら，$f_t = \left(R_t^{eM}, smb_t, hml_t\right)$．
  - smb_t, hml_t はFama=Frenchポートフォリオの超過リターン．
- CAPM と同じ裁定の論理から，$\alpha_i = 0$．
- したがって，$\lambda = Ef_t, \gamma = E(R_t^f)$

モデル3: マルチファクターモデル(2)

$$R_t^{ei} = \alpha_i + \beta_i' f_t + \epsilon_t^i \tag{5}$$

- ただし，ファクターは資産のリターン<u>ではない</u>.
- 例えば Chen=Roll=Ross や Merton の ICAPM.
- したがって「$\alpha_i = 0$」は必ずしも成立しない.
- 期待ベースでは

$$E\left[R_t^{ei}\right] = \gamma + \beta_i' \lambda \tag{6}$$

  また $\gamma = R_t^f$ だから，

$$E\left[R_t^{ei}\right] = \alpha_i + \beta_i' E\left[f_t\right] = \beta_i' \lambda \tag{7}$$

クロスセクションのテスト

1. 時系列モデルを推定する.（モデル 1 と 2 のみ）

$$E\left[R_t^{ei}\right] = \gamma + \beta_i' \lambda \tag{8}$$

ただし（帰無仮説のもとでは）$\gamma = R_t^f, \lambda = Ef_t$ が成立しているものとする．このとき推定値は以下のようになる.

$$\hat{\beta}_i = \left(\sum_{t=1}^{T}\left(f_t - \bar{f}\right)\left(f_t - \bar{f}\right)'\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\left(f_t - \bar{f}\right)R_t^{ei}\right)$$

$$\hat{\lambda} = \bar{f} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} f_t$$

標準誤差は通常の方法で容易に計算できる.

2. 時系列 + クロスセクション

1st Step:

$$R_t^{ei} = \alpha_i + \beta_i f_t \tag{9}$$

を推定し，パラメータ $\hat{\beta}_i$ を得る．

2nd Step:

$$E\left[R_t^{ei}\right] = \hat{\beta}_i' \lambda \tag{10}$$

を推定する．ただし実際には，$E\left[R_t^{ei}\right]$ について以下を仮定する

$$E\left[R_t^{ei}\right] = \widehat{E\left[R_t^{ei}\right]} = \overline{R_t^{ei}} = \sum_{t=1}^{T} R_t^{ei} \tag{11}$$

すると推定値は以下のようになる．

$$\hat{\beta}_i = \left(\sum_{t=1}^{T} \left(f_t - \bar{f}\right)\left(f_t - \bar{f}\right)'\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} \left(f_t - \bar{f}\right) R_t^{ei}\right)$$

$$\hat{\lambda} = \left(\sum_{t=1}^{T} \hat{\beta}_i \hat{\beta}_i'\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} \hat{\beta}_i \overline{R_t^{ei}}\right)$$

3. Fama-McBeth 回帰

1st Step: 同じ．したがって，

$$\hat{\beta}_i = \left(\sum_{t=1}^{T} \left(f_t - \bar{f}\right)\left(f_t - \bar{f}\right)'\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} \left(f_t - \bar{f}\right) R_t^{ei}\right)$$

2nd Step: 各時点について R_t^{ei} を $\hat{\beta}_i$ に回帰した式を推定し，$\hat{\lambda}_t$ を得る．その後，$\hat{\lambda}_t$ の平均値 $\hat{\lambda}$ を計算する．したがって，

$$\hat{\lambda}_t = \left(\sum_{t=1}^{T} \hat{\beta}_i \hat{\beta}_i'\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} \hat{\beta}_i R_t^{ei}\right)$$

$$\hat{\lambda} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \hat{\lambda}_t$$

「時系列+クロスセクション」とFama-McBeth回帰の関係

- 「時系列+クロスセクション」：　$\hat{\lambda}_{cross}$
  - 標準誤差$Var(\hat{\lambda}_{cross})$は，2nd stepのOLSの標準誤差.
  - この方法は，$\hat{\lambda}$の誤差の推定値を過大評価してしまう可能性がある（Jay Shanken）.

- Fama-McBeth回帰：　$\hat{\lambda}_{fama}$
  - $\hat{\lambda}_{fama} = \hat{\lambda}_{cross}$（各自確認せよ）
  - 標準誤差$Var(\hat{\lambda}_{fama})$

$$Var(\hat{\lambda}_{fama}) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\hat{\lambda}_t - \hat{\lambda}\right)^2$$