

Lecture 7: 予測回帰式の統計的推論

November 2008

祝迫得夫

iwaisako@ier.hit-u.ac.jp

予測回帰式 (Predictive Regression) について

$$r_t = \alpha + \beta x_{t-1} + u_t \quad (1)$$

$$x_t = \gamma + \rho x_{t-1} + \epsilon_t \quad (2)$$

- r_t : $t-1$ 期から t 期に掛けての資産収益率
– x_t : t 期における何らかの説明変数
- 一般的な x_t の選択肢
 - 利子率変数; ファイナンシャル・レシオ
 - とりあえず x_t について AR(1) を仮定する
- 一般的には簡単すぎるフレームワークだが, 統計的推論について厳密に議論するにはより適当.

なぜファイナンシャル・レシオは将来の収益率を予測するのか?

- 現在価値関係 or “Growing perpetuity”

$$\begin{aligned} P_t &= E_t \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r_{t+i}} \right) D_{t+i} \right] \\ &\Rightarrow P_t = \frac{D_t}{r-g} \\ &\Rightarrow \frac{D_t}{P_t} = r-g \end{aligned}$$

- 配当株価比 (D/P) もしくはその対数 ($d-p$) は時間を通じて安定的. つまり d と p の間に共変関係が存在する.
- もし $d-p$ が長期平均より高ければ, P は将来上昇する可能性が高い. したがって将来の収益率は高くなる可能性が大.
 - 同種の議論は株価/収益比 (PER) についても成立する.

ファイナンシャル・レシオの持続性 (persistence) について

- データ上は配当株価比や PER は, 非常に持続性が高く, 単位根過程に近い動きをする. そのため $\hat{\beta}$ の推定値にはバイアスが発生する.
- $\hat{\beta}$ のバイアスの第1の要素
 - 資産収益率を $d-p$ に回帰した場合, 説明変数の持続性が高いので, 予測収益率 (あてはめ値) も持続性が高くなる.
 - 実際のリターンは, 月次レベルではほとんど系列相関がないか (日本), 若干の負の系列相関をもつ傾向 (米国).
 - 結果として予測収益率の方が, 実際のリターンに比べて変動が大きくなる傾向にある. したがって, $d-p$ を予測変数として使うと, 予測期間が長くなるにつれ R^2 は上昇する傾向にある. しかしある時点で予測能力低下の影響が上回り始めるので, 今度は R^2 は減少を始める.
 - See 7.2.1 of Campbell, Lo, and MacKinlay (1997) for details.

- $\hat{\beta}$ のバイアスの第2の要素:

$$r_t = \alpha + \beta x_{t-1} + u_t \quad (1)$$

$$x_t = \gamma + \rho x_{t-1} + \epsilon_t \quad (2)$$

- x_t は AR(1) であると仮定.
- しかし実際は $x_t = d_t - p_t$.

$$\begin{aligned} P_t \uparrow &\implies r_t \uparrow \\ &\implies \left(\frac{D_t}{P_t}\right) \downarrow \implies x_t \equiv d_t - p_t \downarrow \end{aligned}$$

したがって, $\delta = \text{correl}(u_t, \epsilon_t) < 0$.

- もし持続的な予測変数がファイナンシャル・レシオであるなら, $\hat{\beta}$ には上方への, より予測可能性を見出すようなバイアスが発生している.

- より厳密な議論のために $b = (\alpha \ \beta)'$; $p = (\gamma \ \rho)'$ とする.

$$\hat{b} = b + (X'X)^{-1} \epsilon$$

$$\hat{p} = p + (X'X)^{-1} u$$

- 誤差項の相関関係について $u_t = \phi \epsilon_t + v_t$ と書くことができる. ただし $\phi = \text{cov}(u, \epsilon) / \text{var}(u) < 0$.
- 以上から, 次のような関係を導出できる.

$$\hat{b} - b = \phi (\hat{p} - p) + \eta$$

where $\eta \equiv (X'X)^{-1} X'v$. $E[\eta] = 0$; $\text{Var}[\eta] = \sigma_v^2 (X'X)^{-1}$.

- 小標本バイアスについて, 次のような関係を得る.

$$E[\hat{\beta} - \beta] = \phi E[\hat{p} - p]$$

- $\phi < 0$, なので, \hat{p} と $\hat{\beta}$ のバイアスは逆方向の関係を持つ.

- もしサンプル数が十分に大きく、 $\rho \ll 1$ なら、 $E[\hat{\beta} - \beta]$ のバイアスは無視できる.
- しかし一般論として、系列相関 $\hat{\rho}$ の推定値には $-(1+3\rho)/T$ の小標本バイアスが発生することが良く知られている (Kendall [1954]; Stambaugh [1986]).
 $\Rightarrow \phi$ は負なので、したがって $\hat{\beta}$ には上方へのバイアスが発生する.
- Unit root/near unit root 過程の性質から、系列相関 $\hat{\rho}$ の標本分布は、通常の OLS の推定量に比べ負の歪度を持ち、分散も大きい.
 $\Rightarrow \hat{\beta}$ の標本分布は、通常の OLS の推定量に比べ正の歪度を持ち、分散も大きい.
- 詳しくは Stambaugh (1999) を参照.

1980年代の予測回帰式に関する議論

- Fama and French (1988) は $d-p$ が月次の NYSE のインデックスの収益率を予測することを報告している (1941-86年).
- Fama-French の分析の問題点: $d-p$ は持続性が高く単位根過程に近い
 - Stambaugh (1986) 理論; Mankiw and Shapiro (1986): モンテカルロ法によって、存在しない予測可能性を見つけてしまうバイアスが発生していることを示唆.
 - Nelson and Kim (1993): 小標本バイアスを bootstrap によって修正: p-values は 0.03~0.33.
 - Stambaugh (1999): $d-p$ について AR(1) を仮定した上で、 β の小標本分布を導出. 得られた p-value は 0.15.

より最近の研究 1: Lewellen (2004, JFE)

- $E[\hat{\beta} - \beta | \hat{\rho}] = \phi E[\hat{\rho} - \rho] \implies \hat{\beta}_{adj} = \hat{\beta} - \phi(\hat{\rho} - \rho)$
- 真の ρ は分からないが、経済理論に基づき $\rho \approx 1$ という上限を設定することができるという主張。
 - すると $\rho = 1$ でバイアスは最大になるので、 $\hat{\beta}$ のバイアスは最低になる。
 - 別の表現をすると：もし予測可能性がないという帰無仮説が正しければ、誤差項の相関の性質から、高い $\hat{\beta}$ と高い $\hat{\rho}$ を同時に観測する可能性は非常に小さい。
- もし予測変数の持続性が限定的なら、条件付き t 検定を行う。

より最近の研究 2: Campbell and Yogo (2006, JFE)

- $E[\hat{\beta} - \beta | \hat{\rho}] = \phi E[\hat{\rho} - \rho] \implies \hat{\beta}_{adj} = \hat{\beta} - \phi(\hat{\rho} - \rho)$
- 最初に Elliott, Rothenberg, and Stock, (1996, Econometrica) に基づいて、 $\hat{\rho}$ の信頼区間を構築する。
- 次に、最初のステップで構築された信頼区間に含まれる ρ の値すべてについて、対応する $\hat{\beta}$ の信頼区間を構築する。

日本のデータに関する分析

	obs.	$\hat{\delta}$	95% CI: ρ	OLS $\hat{\beta}$	90% CI: β
(1) Monthly					
1970:6-2006:6	432	-0.646	[0.996, 1.004]	0.003	[-0.012, 0.003]
1990:1-2006:6	192	-0.641	[0.989, 1.009]	0.034	[-0.020, 0.025]
(2) Quarterly					
70:2Q-06:2Q	146	-0.716	[0.981, 1.012]	0.022	[-0.024, 0.026]
90:1Q-06:2Q	65	-0.686	[0.924, 1.013]	0.126	[-0.022, 0.128]

$$r_t = \alpha + \beta x_{t-1} + u_t \quad (1)$$

$$x_t = \gamma + \rho x_{t-1} + \epsilon_t \quad (2)$$

$$\hat{\delta} = \text{correl}(u_t, \epsilon_t)$$

フロンティア

- Ang and Bekaert (2008, RFS)
 1. Predictability is mainly a short-horizon, not a long-horizon, phenomenon. The predictive ability of the dividend yield is best seen in a bivariate regression with short rates only at short horizons.
 2. The strongest predictability comes from the short rate rather than from the dividend yield.
 3. High dividend yields predict high future interest rates.
 4. Dividend and earnings yields have good predictive power for future cashflow growth rates, but not future excess returns. Hence, a potentially important source of variation in price-earnings and price-dividend ratios is the predictable component in cashflows.

- Cochrane (2008, RFS)

1. If returns are not predictable, dividend growth must be predictable, to generate the observed variation in dividend yields. I find that the absence of dividend growth predictability gives stronger evidence than does the presence of return predictability.
2. Long-horizon return forecasts give the same strong evidence. These tests exploit the negative correlation of return forecasts with dividend-yield autocorrelation across samples, together with sensible upper bounds on dividend-yield autocorrelation, to deliver more powerful statistics. I reconcile my findings with the literature that finds poor power in long-horizon return forecasts, and with the literature that notes the poor out-of-sample R^2 of return-forecasting regressions

- Reference

- Ang, Andrew and Geert Bekaert (2007) Stock Return Predictability: Is it There?, *Review of Financial Studies*, 20, 3, 651-707.
- Campbell, J.Y., Yogo, M., 2006. Efficient tests of stock return predictability. *Journal of Financial Economics* 81, 27–60
- Cochrane, John H. (2008) “The Dog That Did Not Bark: A Defense of Return Predictability” *Review of Financial Studies*, 21, 4, 1533-1575.

- Elliott, G, T.J. Rothenberg, and J.H. Stock (1996) Efficient tests for an autoregressive unit root, *Econometrica* 64(4) 813-836.
- Fama, E.F., French, K.R., 1988. Dividend yields and expected stock returns. *Journal of Financial Economics* 22, 3–24.
- Kendall, M.G., 1954. Note on bias in the estimation of autocorrelation. *Biometrika* 41, 403-404.
- Lewellen, J., 2004. Predicting returns with financial ratios. *Journal of Financial Economics* 74, 209–235.
- Mankiw, N.G., Shapiro, M.D., 1986. Do we reject too often? Small sample properties of tests of rational expectations models. *Economics Letters* 20, 139–145.
- Nelson, C.R., Kim, M.J., 1993. Predictable stock returns: the role of small sample bias. *Journal of Finance* 48, 641–661.
- Stambaugh, R.F., 1986. Bias in regressions with lagged stochastic regressors. Working Paper. University of Chicago, Chicago.
- Stambaugh, R.F., 1999. Predictive regressions. *Journal of Financial Economics* 54, 375–421.
- Torous, W., Valkanov, R., Yan, S., 2004. On predicting stock returns with nearly integrated explanatory variables. *Journal of Business* 77, 937–966.