資産価格の実証分析／金融経済論 II

現在価値関係

October 2007
Last Revised: November 2008

祝迫得夫

iwaisako@ier.hit-u.ac.jp

株式市場についての考え方

1. Efficient: B-school. 特に 1960 年代から 70 年代

2. Nuts: ケインズの美人投票　cf. Shiller, Summers.

- 古典的な効率性のテスト

  期待リターン一定の仮定：$\mathrm{E}[r_t] = r$ (constant).

  回帰式： $r_{t+1} = \alpha + \beta \mathrm{X}_t$ を OLS で推定する

  $H_0 : \beta = 0$

- 予測変数のベクトル X_t の中身＝予測を行う際の情報集合
  ウィーク型; セミ・ウィーク型; ストロング型

ケチャップ経済学について

- Nonetheless ketchup economists have an impressive research program, focusing on the scope for excess opportunities in the ketchup market. They have shown that two quart bottles of ketchup invariably sell for twice as much as one quart bottles of ketchup except for deviations traceable to transaction costs, and that one cannot get a bargain on ketchup by buying and combining ingredients once one takes account of transaction costs. Nor are there gains to be had from storing ketchup, or mixing together different quality ketchups and selling the resulting product. Indeed, most ketchup economists regard the efficiency of the ketchup market as the best established fact in empirical economics.
  - Lawrence H. Summers, "On Economics and Finance" *Journal of Finance*, July 1985, 40: 3, 633-35

現在価値関係

- 定義式

$$\mathrm{E}_t[1 + r_{t+1}] \equiv \mathrm{E}_t\left[\frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}\right] \tag{1}$$

- $\mathrm{E}_t[r_{t+1}] = r$ (constant), $\forall t$ を仮定する

$$P_t = \mathrm{E}_t\left[\frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{1 + r}\right] \tag{2}$$

- (2) 式について，K 期間前向きに代入を繰り返す

$$\begin{aligned} P_t &= \mathrm{E}_t\left[\frac{D_{t+1}}{1+r} + \frac{P_{t+2} + D_{t+2}}{(1+r)^2}\right] \\ &= \mathrm{E}_t\left[\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i D_{t+i}\right] + \mathrm{E}_t\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^K P_{t+K}\right] \end{aligned} \tag{3}$$

- さらに以下の No Bubble 条件を仮定する（詳しくは後で）.

$$\lim_{K\to\infty} \mathrm{E}_t \left[\left(\frac{1}{1+r} \right)^K P_{t+K} \right] = 0 \tag{4}$$

- (4) 式を仮定しながら，(3) 式について前向きの代入を繰り返す：$K \to \infty$

$$P_t = \mathrm{E}_t \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^i D_{t+i} \right] \tag{5}$$

- (5) 式は，現在の株価が将来の配当の流列の現在割引価値に等しいことを意味している.
- 「ゴードン型成長モデル／成長するパーペチュイティ」: $D_{t+1} = (1+g)D_t, \forall t$ を仮定すると以下の式を得る

$$P_t = \frac{D_t}{r-g}$$

初期の実証：分散制約検定

- 事後的なファンダメンタル値 P_t^* を以下のように定義する.

$$P_t^* = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^i D_{t+i} \tag{6}$$

- したがって $P_t = \mathrm{E}_t [P_t^*]$ もしくは

$$P_t^* = P_t + v_t \text{ and } \mathrm{Cov}(P_t, v_t) = 0 \tag{7}$$

- (7) 式は以下を意味する

$$\begin{gathered} \mathrm{Var}(P_t^*) = \mathrm{Var}(P_t) + \mathrm{Var}(v_t) \\ \mathrm{Var}(v_t) \geq 0 \Longrightarrow \mathrm{Var}(P_t^*) \geq \mathrm{Var}(P_t) \end{gathered} \tag{8}$$

- 現実の配当の確率過程は，株価よりずっとスムーズ．したがって株価形成は「非合理的」（Shiller）.

Shillerの実証分析の問題点

- 期待収益率が時間を通じて一定とは考えにくい：$\mathrm{E}_t[r_{t+1}] \neq r$：
- 実際のTは有限なので，事後的な配当の実現値を有限サンプルで近似するか，(6)式右辺に含まれるD_tの確率過程についてのモデルで代替する必要がある．
- データ上，P_tとD_tは非定常：
  - Shillerの議論は，暗黙のうちにD_tの定常性を仮定している．P_t, D_tがI(1)過程なら，(8)式の不等号は成立しない．
- Shiller (AER 1981); LeRoy and Porter (Econometrica 1981): 分散制約検定 (variance bound test) を提案
- Marsh and Merton (AER 1986): Shiller達の議論の批判

合理的バブル (1)

- (3)式の差分方程式の一般解

$$P_t = \mathrm{E}_t\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i D_{t+i}\right] + B_t \tag{9}$$

ただし

$$B_t = \frac{\mathrm{E}_t[B_{t+1}]}{1+r} \tag{10}$$

- (10)式の関係を満たすB_tの系列は，すべて差分方程式の解となる．厳密には，(5)式の現在価値関係を導出するには，追加的なterminal conditionが必要．
- 横断性条件；No-Ponzi game条件

合理的バブル (2)

- 定性的バブル (Deterministic bubble: $B_{t+1} = (1+r)B_t$) は，最大化の横断性条件を満たしていない
- 負のバブル：買う投資家がいない
- Blanchard and Watson (1982) の確率的バブル

$$\begin{aligned} B_{t+1} &= \left(\frac{1+R}{\pi}\right) B_t + \zeta_{t+1} \quad \text{with Prob} = \pi \\ &= \zeta_{t+1} \qquad\qquad\qquad\quad \text{with Prob} = 1-\pi \end{aligned} \tag{11}$$

ただし $\mathrm{E}_t[\zeta_{t+1}] = 0$.

- 合理的バブルの問題点
  - Tirole (1982): 厳密な意味での無裁定条件を満たしていない
  - 実証上の問題：確率的バブルは発散的な価格経路を意味している．しかし実際にはそのような，株価の動きは観察できない．
  - あるいは，我々が一般的に「バブル」と呼んでいるものには合致しない．　cf. 日本のバブル期の株価の動き
- 「非合理的バブル」or 「ファッヅ “fads”」
  - 社会的な熱狂（Euphoria）？
  - Greater fool 仮説（Shiller）
  - 情報／意見の異質性
  - 80 年代半ば以降：ボラティリティの大きさの問題よりも，予測可能性／平均回帰性の存在に関する研究にシフト．

Campbell-Sheiller 分解

- 対数線形近似による現在価値関係
  - $1 + i_{t+1} = (P_{t+1} + D_{t+1})/P_t$
  - 両辺の対数をとる

$$
\begin{aligned}
r_{t+1} &= \log(P_{t+1} + D_{t+1}) - \log P_t \\
&= p_{t+1} - p_t + \log\left(1 + \exp(d_{t+1} - p_{t+1})\right)
\end{aligned}
$$

  - $f(\delta) \equiv \log\left(1 + \exp(\delta)\right)$ とし、δ の平均値 $\overline{\delta} = \overline{d-p}$ の周辺で、テイラー近似を行う：

$$f(\delta) \approx f(\overline{\delta}) + f'(\overline{\delta})(\delta - \overline{\delta})$$

  - したがって

$$
\begin{aligned}
r_{t+1} &\approx k + \rho p_{t+1} + (1-\rho)d_{t+1} - p_t \qquad (12)\\
\rho &\equiv 1/(1 + \exp(\overline{d-p})) \\
k &\equiv -\log(\rho) - (1-\rho)\log(1/\rho - 1).
\end{aligned}
$$

- (12) 式を p_t についての差分方程式に書き換える

$$p_t = k + \rho p_{t+1} + (1-\rho)d_{t+1} - r_{t+1} \qquad (13)$$

- (13) 式を前向きに解いていき、バブルを排除する条件を仮定すると、以下のような対数線形近似による現在価値関係式が得られる

$$p_t = \frac{k}{1-\rho} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \left[(1-\rho)d_{t+1+j} - r_{t+1+j}\right] \qquad (14)$$

- (14) 式を事前の予想に関する式に書き換える

$$p_t = \frac{k}{1-\rho} + \mathrm{E}_t\left[\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \left[(1-\rho)d_{t+1+j} - r_{t+1+j}\right]\right] \qquad (15)$$

- (15) 式を (12) 式に代入し整理すると、以下の関係式を得る

$$
\begin{aligned}
r_{t+1} - \mathrm{E}_t\left[r_{t+1}\right] &= \mathrm{E}_{t+1}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j \Delta d_{t+1+j}\right] - \mathrm{E}_t\left[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j \Delta d_{t+1+j}\right] \qquad (16)\\
&\quad - \left(\mathrm{E}_{t+1}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}\right] - \mathrm{E}_t\left[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}\right]\right)\\
r_{t+1} - \mathrm{E}_t\left[r_{t+1}\right] &= e_{t+1} = e_{d,t+1} - e_{r,t+1} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

- 「予想されない収益率のイノベーション」
  ＝「将来の配当成長に関する予想の変化」
  ＋「将来の期待収益率の変化」

- (17) 式の意味：投資家の期待の整合性を保証する恒等式（会計式）
- 将来の期待リターンの変動 $\rightarrow$ 平均回帰性の存在

- 暗黙の仮定：$d - p = \ln(D/P)$ が安定的.
- すなわち配当／株価比率 (D/P) が安定的
- 配当と株価の間に「共和分」関係が存在する

- 実証分析のアプローチ
  - 共和分モデルを直接推定する
  - いわゆる Financial Ratio（PDR，PER 等）を説明変数とした，Predictive Regression を推定する
  - 実質上，両者はほとんど同じことをしている.

$\boxed{\text{Campbell型の分散分解}}$

- Campbell (1991, Economic Journal)

$$e_{t+1} = e_{d,t+1} - e_{r,t+1} \tag{18}$$

$$\mathrm{Var}(e_{t+1}) = \mathrm{Var}(e_{d,t+1}) + \mathrm{Var}(e_{r,t+1}) - 2\mathrm{Cov}(e_{d,t+1}, e_{r,t+1})$$

$$1 = \frac{\mathrm{Var}(e_{d,t+1})}{\mathrm{Var}(e_{t+1})} + \frac{\mathrm{Var}(e_{r,t+1})}{\mathrm{Var}(e_{t+1})} - \frac{2\mathrm{Cov}(e_{d,t+1}, e_{r,t+1})}{\mathrm{Var}(e_{t+1})} \tag{19}$$

- リターンの変動に占める：
  - 「配当のニュースのシェア」
  - 「将来のリターンの変動についてのニュースのシェア」
  - マイナス「両者の共分散」

- 超過収益率についての分散分解（Campbell and Ammer 1993, JF）
  - 短期金利変数を追加
- どうやってを $\{e_{t+1}, e_{d,t+1}, e_{r,t+1}\}$ 推定するか？→VAR

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + \epsilon_{t+1} \tag{20}$$

- 推定値 $\widehat{A}$ を使って j 期先の予測を行う（インパルス応答関数）.

$$\mathrm{E}_t\left[\mathbf{x}_{t+1+j}\right] = \widehat{A}^{j+1}\mathbf{x}_t \tag{21}$$

  - 将来のリターンの変動の経路
  - 将来の配当の予測

VARモデルの識別

- 同時点でのショックの相関関係について，何らかの先験的な仮定をおかなければいけない
  - Cochraneの論文の場合（後述）は，同時点では「配当→株価」という伝播はあるが，逆方向は無いと仮定
  - 統計学だけではなく，経済学的な発想によるidentificationが必要.
- Campbellのケース：Overidentification?
  - 配当の将来変動の確率モデルを推定するのは難しい（いずれにせよ，説明力が非常に弱い）.
  - したがって，実際のリターンの変動から，将来のリターンについてのニュースの部分を引いた部分を，配当のショックとして定義する.

- Campbell (1991, EJ); Campbell and Ammer (1993, JF)
  - 追加的説明変数：短期金利，配当／株価比
  - 期間にもよるが、アメリカの株式収益率の変動の30%から、場合によっては90%近くが、将来の期待収益率の変動によって説明される.
- 実証のインプリケーション
  - 期待収益率は一定ではない.
  - 多変数モデルの推定における，株式収益率の平均回帰性／予測可能性の存在.
- 予測のタイムホライズン
  - 短期金利：比較的短期
  - 配当／株価比：より長期

$\boxed{\text{解釈と潜在的問題点}}$

- 予測変数に$d-p$が含まれるので，収益率の予測回帰式とも，一種の共和分モデルとも解釈できる．

- 潜在的問題：予測変数の持続性（persistence）
  - 配当株価比の予測能力の過大評価（後から議論）
  - したがって,「将来の期待収益率の変化」のシェアは，過大評価されているかも知れない．
  - $d-p$の安定性が保証されないなら，そもそも対数線形近似が妥当か？

- 拡張の可能性：Vuolteenaho (2002, JF): 個別株に関する分散分解