資産価格の実証分析／金融経済論 II

Lecture 4: ARCH モデル

September 2005
Last Revised: October 2008

祝迫得夫

iwaisako@ier.hit-u.ac.jp

ARCH モデル: 基本的発想

- 株式収益率のボラティリティ（変動の大きさ）は，時間を通じて変化する．
- ボラティリティの変動には，正の系列相関がある :「シケの相場と凪の相場」が相互に現れる
  → 条件付き分散（conditional variance）の変動
- 自己回帰条件付き不均一分散（Autoregressive Conditional Heteroscedasticity: ARCH）モデル :
  $r_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t$
  $\sigma_t^2 = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 \qquad u_t \equiv r_t - \mu$

  ただし ϵ_t は標準正規分布に従うものとする．

  – Robert E. Engle (1982, Econometrica): イギリスのインフレ率についての分析

- 一般化されたARCH（Genalized ARCH: GARCH）モデル
  条件付分散のラグ（$\sigma_{t-i}^2, i = 1, 2, ...$）を追加する．
  Bollerslev (1986, Journal of Econometrics)
  $\sigma_t^2 = a_0 + a_1 u_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2$

- GARCH(p,q) モデル
  $\sigma_t^2 = c_0 + a_1 u_{t-1}^2 + a_2 u_{t-2}^2 + ... + a_q u_{t-q}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 + b_2 \sigma_{t-2}^2 + ... + b_p \sigma_{t-p}^2$

  – GARCH(p,1) モデルの方が，高次のARCH(p) モデルよりパフォーマンスが良い

- 最尤法による推定

  – Return equation: $y_t = X_t \beta + u_t$
  X_t: 収益率の説明変数のベクトル

  – Volatility equation:
  $\sigma_t^2 \equiv \mathrm{Var}(u_t) = h(u_{t-1}, ..., u_{t-q}; \sigma_{t-1}, ..., \sigma_{t-p}; X_{t-1}, ..., X_{t-k}; \alpha)$

  対数尤度関数：$\log \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \log \sigma_t^2 - \frac{1}{2}(y_t - X_t \beta)^2 / \sigma_t^2$

- RATSのプログラム例

```
DECLARE SERIES U ;* Residuals
DECLARE SERIES H ;* Variances
NONLIN B0 VC VA VB
FRML RESID = Y - B0
FRML HF = VC + VA*H{1} + VB*U{1}**2
FRML LOGL = (H(T)=HF(T)),(U(T)=RESID(T)), -.5*(LOG(H(T))
+ U(T)**2/H(T))
LINREG(NOPRINT) Y / U
# CONSTANT
COMPUTE B0=%BETA(1)
COMPUTE VC=%SEESQ,VA=.05,VB=.05
SET H = %SEESQ
MAX(METHOD=BHHH,RECURS,ITERS=100) LOGL start end
```

cf. RATSの現行バージョンでは，コマンド化：garch(p=1,q=1)

初期のARCH/GARCHモデルの問題点

- 正のショックと負のショックが、ボラティリティに与える影響が同じ
  → 実際には負のショックによる効果の方が強い.

- パラメーターに関して様々な制約が必要（条件付き分散の定常性の確保）

- ボラティリティに関する統計モデルの当てはめ（non-parametric）でしかなく，なぜそうなるかについての説明がない

- 条件付き分散がショックの大きさに比例的に反応するので,極端なショックに対しては，事後的な条件付き分散が高く評価されがち

- 実際には条件付き分布も，正規分布よりは“Fat-tail”な分布に従う
  →　条件付き分布としてt分布を用いる

1次と2次のモーメントの関係(1)：レバレッジ効果

- レバレッジ効果：負のショックは，ボラティリティをより大きく増加させる．
- Fisher Blackの説明:
株価の低下→相対的に借り入れ（レバレッジ）が上昇
→ボラティリティup
- 実際このような経済メカニズムが働いているかどうかは怪しいが，統計的な事実としては頑強．
- レバレッジ効果のモデル化の例(1)
Glosten, Jagannatha, and Runkle (1993, JF):
"GJR" or "threshold ARCH"

$\sigma_t^2 = c_0 + a_1 u_{t-1}^2 + c_1 S_{t-1} u_{t-2}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2$
where $S_t = 1$ if $u_t < 0$; $\quad = 0$ if $u_t > 0$

- 通常，c_1の推定値は正．

- レバレッジ効果のモデル化の例(2)
NelsonのEGARCH

$$h_t = c_0 + a_1 \frac{|u_{t-1}| - \gamma u_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + b_1 h_{t-1}$$
where $h_t = \log(\sigma_t^2)$

- もし$u_t > 0$なら，u_tの効果は$(1-\gamma)u_{t-1}$，$u_t < 0$なら$(1+\gamma)u_{t-1}$.
- 条件付き分散σ_t^2が常に正であるために，パラメーターの制約を必要としない．

1次と２次のモーメントの関係(2)：ARCH-M

- 現代ファイナンスの教義: リスクとリターンのトレードオフ
- 投資家の視点：条件付き分散 up → 次期の期待収益率 up
  ハイリスク・ハイリターン
- 統計的インプリケーション：
  条件付き分散 up → 期待リターン up
- ARCH-in-mean あるいは ARCH-M モデル（Engle, Lilien, and Robins, 1987）

  $r_t = \mu_0 + \mu_1 \sigma_t^2 + \sigma_t \epsilon_t$
- 理論的には $\mu_1 > 0$
- 実際は，条件付き分散から期待リターンへのフィードバックは，あまり統計的に有意でない

確率分布の視点から見たARCHモデル

- 日次・週次の金融資産の収益率の無条件分布：同じ分散の正規分布より尖度 (kurtosis) が大きい＝より分布の裾野が広い.
  - 大数の法則が働かない（Gaussian ではない）.
  - cf 安定分布，Levy 分布.
- 分散の異なる正規分布の混合分布としての ARCH モデル.
  - 投資ホライズンが長くなれば（月次，年次），時間による aggregation の効果で，極端に大きなショックと小さなショックは相殺し，無条件分布も正規分布に近づく.
- では投資ホライズンがより短くなったらどうなるのか？

確率過程の推定における漸近理論

- 金融資産の確率過程の推定の目的：
  - 金融資産のプライシング
  - 派生証券のプライシング
  - ポートフォリオ・アロケーション
  - リスク・マネジメント（VaR），
- ある時点で，マーケットで取引されている資産について，
  - できるだけ正確な期待収益率（＝平均）の推定を行う．
  - できるだけ正確な収益率の共分散行列の推定を行う．
- ベンチマーク：ランダム・ウォーク（ブラウン運動）

$$dp_t = \alpha dt + \sigma dB$$

ブラウン運動の推定

- Merton (1980, JFE):
- 一定期間のサンプル：T
- サンプル数：$n+1$;　　サンプル間の間隔：h
- $T = nh$ (by definition)
- 平均 α と分散 σ^2 の推定の精度
  - 「α」の最良な推定量：　T を（サンプル期間）をとにかく長く取ったもの
  - 「σ^2」の最良な推定量：　n（サンプル数）をとにかく多く取ったもの
  - 例え T が短くても，観察の頻度を多くしていけば，σ^2 の推定値は連続時間に近づくにつれ，限りなく正確になる
  - 前提：構造変化やジャンプは存在しない

一般化

- Merton は幾何ブラウン運動について議論したが，一般的な拡散過程（diffusion process）についても同じことが言える
  - 離散時間 → 連続時間
  - GARCH： 差分方程式 → 微分方程式
- Nelson：GARCH モデルの極限分布の導出
  - GARCH→inverted gamma
  - EARCH→ 対数正規 cf. EGARCH の妥当性
- 連続時間に限りなく近い頻度で株価を観察できれば，ボラティリティが時間を通じて変化したとしても，単に直近のデータだけで十分に正確に条件付分散を推定できる．
- ただし，σ^2 の時間を通じた変化が十分にスムーズなものであることが必要 → 構造変化やジャンプは存在しない．

ファイナンスにおける実例：ボラティリティの予測

- VaR: Value at Risk
- VaR(mean)= $E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu)$
- W^*：信頼水準が c であるときの、最低のポートフォリオ価値：$W^* = W_0(1 + R^*)$
- $c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dW$
- ARCH モデルは，基本的にはボラティリティに関するノンパラメトリック・モデル．
- リスク管理（VaR）における初期の論争：GARCH か Exponential Smoothing（e.g.RiskMetrics）か？
  $\widehat{\Omega}_t = \gamma R_{t-1}R'_{t-1} + (1-\gamma)\widehat{\Omega}_{t-1} = \gamma \sum_{i=1}^{\infty}(1-\gamma)^{i-1}R_{t-i}R'_{t-i}$

- GARCH モデルの長所
  - マーケット・ボラティリティの予測はより精度が高い
    - 追加的な経済学的構造を取り入れやすい
    - リターン項とのフィードバック関係（レバレッジ効果）
    - 短期金利などの追加的な説明変数
- Exponential Smoothing の長所
  - 計算が簡単
  - 変数を数個より多くすると、GARCH モデルは実質的に推定不可能になる：
    $\widehat{\Omega}_t$（条件付き共分散行列）の推定で制約を課す必要

- Nelson : 実際問題としては，実用上の差はない（Foster and Nelson, Econometrica 1996）
- より重要な問題
  - ラグの長さ／カーネルの幅の決定
  - レア・イベントをどう扱うか？　cf. Jump diffusion
  - 目的：　プライシング，ポートフォリオ・アロケーション，リスク・マネジメント，派生証券のプライシング

より最近の研究

- 実現ボラティリティ（realized volatility）
  - 森棟公夫日本経済学会会長公演
  - Intradailyで，できるだけ頻繁に観察値をとる:cf.ティック・データ
  - 単に直近の分散の平均を取ればよい
  - 問題点：DailyとIntradailyは相似関係にあるのか？
    マーケット・マイクロストラクチャーの問題
- Intradailyの条件付き分散のショックはLong-memory？

  観察頻度を多くすると，非常に単位根に近くなる

多変数のGARCH (1)

- １変数のGARCH=条件付き分散の推定（パラメータは１個）
- 多変数のGARCH=条件付き「共分散行列」の推定
- 一般的な多変量GARCHモデル

$$\mathrm{vech}(H_t) = C + \sum_{i=1}^{q} A_i \mathrm{vech}(\epsilon_{t-i}\epsilon'_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} B_j \mathrm{vech}(H_{t-j})$$

$$\epsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

- $\mathrm{vech}(H_t) =$ 共分散行列 H_t 中の独立なパラメータを取り出すオペレーター

$$\mathrm{vech}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = (m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{22}, m_{23}, m_{33})$$

多変数の GARCH (2)

- したがって A_i, B_j は，$N(N+1)/2$ の行と列を持つ.
- $p = q = 1$ としても，　$N(N+1)/2 + 2(N(N+1)/2)^2$
- $N = 3$ なら 78 個，$N = 4$ なら 210 個
- 変数の数 N が大きくなると，すぐにモデルが実際上とり扱い不可能になる.
- 多変数の GARCH では，共分散行列にどのような制約を掛け，パラメーターの数を減らして推定するかが最大の問題.
- 統計学的に考えた場合，制約の掛け方に理論的な良し悪しがあるわけはない．経済学的なロジックが必要