資産価格の実証分析／金融経済論 II

Lecture 4B: 多変量 GARCH モデル

September 2005
Last Revised: October 2008

祝迫得夫

iwaisako@ier.hit-u.ac.jp

多変数の GARCH (1)

- １変数の GARCH=条件付き分散の推定（パラメータは１個）
- 多変数の GARCH=条件付き「共分散行列」の推定
- 一般的な多変量 GARCH モデル

$$\mathrm{vech}(H_t) = C + \sum_{i=1}^{q} A_i \mathrm{vech}(\epsilon_{t-i}\epsilon'_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} B_j \mathrm{vech}(H_{t-j})$$
$$\epsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

- $\mathrm{vech}(H_t) =$ 共分散行列 H_t 中の独立なパラメータを取り出すオペレーター

$$\mathrm{vech}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = (m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{22}, m_{23}, m_{33})$$

多変数のGARCH (2)

- したがって A_i, B_j は，$N(N+1)/2$ の行と列を持つ.
- $p = q = 1$ としても，　$N(N+1)/2 + 2(N(N+1)/2)^2$
- $N = 3$ なら 78 個，$N = 4$ なら 210 個
- 変数の数 N が大きくなると，すぐにモデルが実際上とり扱い不可能になる.
- 多変数の GARCH では，共分散行列にどのような制約を掛け，パラメーターの数を減らして推定するかが最大の問題.
- 統計学的に考えた場合，制約の掛け方に理論的な良し悪しがあるわけはない．経済学的なロジックが必要

Bollerslev (1990)

- Bollerslev (1990, RE Statistics), so called CC-GARCH
- 相関係数一定を仮定:　$H_t = \sqrt{V_t}\Phi\sqrt{V_t'}$
- V_t は GARCH(1,1)
- V_t は $3N$ 個，相関係数は $N(N+1)/2 - N$ 個のパラメーターを持つ
- ３変数で 12 個，４変数で 18 個のパラメーター.

Bollerslev, Engle, and Wooldridge (1988)

- Bollerslev, Engle, and Wooldridge (1988, JPE)
- 共分散行列の第 (i,j) 要素が GARCH に従うと仮定
  $\sigma_{i,j,t} = \omega_t + \beta_{i,j}\sigma_{i,j,t-1} + \alpha_{i,j}u_{i,t-1}u_{j,t-1}$
- パラメーター数は $3N(N+1)/2$ 個
- Bollerslev 達自身は 3 個の資産でモデルを推定。それでも 18 個のパラメータを推定する必要.

- 無条件 CAPM (Sharpe=Lintner)
  $\mathrm{E}R_t^i = \beta^i\lambda \quad \beta^i \equiv \dfrac{Cov\left(R_t^i, R_t^M\right)}{Var\left(R_t^M\right)},\ \lambda \equiv \mathrm{E}R_t^M$
- 条件付き CAPM (Campbell Harvey 他)
  $\mathrm{E}_{t-1}R_t^i = \beta_t^i\lambda_t \quad \beta_t^i \equiv \dfrac{Cov_{t-1}\left(R_t^i, R_t^M\right)}{Var_{t-1}\left(R_t^M\right)},\ \lambda_t \equiv \mathrm{E}_{t-1}R_t^M$
- R_t^e を N 資産の超過収益率のベクトルとする．BEW は以下のような多変量 GARCH を提案
  $\mathrm{E}_{t-1}R_t^e = \mu_t \quad \mathrm{Var}_{t-1}(R_t^e) = H_t$
- ω_{t-1} を $t-1$ 時点での最適ポートフォリオ選択とする．すると CAPM のインプリケーションとして:
  $R_t^M = \omega_{t-1}R_t^e. \quad \mathrm{Var}_{t-1}(R_t^M) = \omega_{t-1}'H_t\omega_{t-1} = \sigma_{M,t}^2$

- リスクプレミアムは $\lambda_t = \omega'_{t-1}\mu_t$.
- したがってベータは
  $\beta_t = \mathrm{Cov}_{t-1}(R_t^e, R_t^M)/\sigma^2_{M,t} = H_t\omega_{t-1}/\sigma^2_{M,t}$.
- BEW は $\lambda_t/\sigma^2_{M,t} = \delta$ で一定を仮定.
- したがって BEW の条件付き CAPM は以下のように書ける:
  $\mathrm{E}_{t-1}R_t^e = \mu_t = \delta H_t\omega_{t-1}$.
- The Model:
  $R_t^e = b + \delta H_t\omega_{t-1} + \epsilon_t$.
  $\mathrm{vech}(H_t) = C + A\mathrm{vech}(\epsilon_{t-i}\epsilon'_{t-i}) + B\mathrm{vech}(H_{t-1})$
  $\epsilon_t|\psi_{t-1}$.

- BEW は３つの資産—株式のマーケット・インデックス，６ヶ月物国債，２０年物国債—のみを使用.
- それでもパラメーターは 78 必要なので，A,B に関して対角成分以外がすべてゼロであることを仮定 →18 個のパラメーター.
  $R_t^{ie} = b_i + \delta(h_{i1t}\omega_{1,t-1} + h_{i2t}\omega_{2,t-1} + h_{i3t}\omega_{3,t-1}) + \epsilon_{i,t}$.
  $h_{ijt} = \gamma_{ij} + \alpha_{ij}\epsilon_{it-i}\epsilon'_{jt-i} + \beta_{ij}h_{ijt-1}$
- 対立仮説
  - $R_t^{ie} = b_i + \delta(h_{i1t}\omega_{1,t-1} + h_{i2t}\omega_{2,t-1} + h_{i3t}\omega_{3,t-1}) + \gamma x_t + \epsilon_{i,t}$.
  - $H_1 : \gamma \neq 0 \qquad x_t = h_{iit};\ \ R_{t-1}^{ie};\ \ \ln(c_t/c_{t-1})$
  - 実際には BEW は $\gamma \neq 0$ をテストしてはいない

なぜδは定数項か？

- $U(W_t) = \mathrm{E}_{t-1}W_t - \dfrac{k}{2}\mathrm{Var}_{t-1}(W_t)$
- $W_t = \alpha'_{t-1}R_t + (1-\alpha'_{t-1}\iota)R_t^f = \alpha'_{t-1}\left(R_t - \iota R_t^f\right) + R_t^f$
- $\omega_{t-1} = \alpha_{t-1}(\alpha'_{t-1}\iota)^{-1}$.
- したがって効用最大化問題は
$\max .\alpha'_{t-1}\mu_t - \dfrac{k}{2}\alpha'_{t-1}H_t\alpha_{t-1} \to \alpha^*_{t-1} = \dfrac{1}{k}H_t^{-1}\mu_t$.
- $\delta = \lambda_t/\sigma^2_{M,t} = \dfrac{\omega'_{t-1}\mu_t}{\omega'_{t-1}H_t^{-1}\omega_{t-1}} = (\alpha'_{t-1}\iota)\dfrac{\alpha^*_{t-1}\mu_t}{\alpha^{*\prime}_{t-1}H_t\alpha^*_{t-1}} = (\alpha'_{t-1}\iota)\dfrac{k^{-1}\mu'_tH_t^{-1}{}_t\mu_t}{k^{-2}\mu'_tH_t^{-1}H_tH_t^{-1}\mu_t} =$
$k(\alpha'_{t-1}\iota)$

条件付きマーケットモデル

- Braun, Neson, and Sunier (1995, JF)
- すべてをマーケットと個々の銘柄の間のベータを通じた関係に置き換える.
- 本質的には2変数モデルだが，マーケットのボラティリティは外生（1変数GARCH）
- ベータと個別リスクの変動は，aggregate volatilityと過去の個別リスクの関数

Practical Advice (1)

- ARCH モデルは，単独の資産の時間を通じた変動の性質の変化をうまく捉える
- 共分散を捨て，高次のモーメントを分析している
- この講義の後半で扱う Hansen and Jagannathan の方法論（Cochrane の教科書）は多数の資産の共変動を理解するのに優れている
- 高次のモーメントを捨て，共分散を分析している
- 残念ながら，両者を一度にうまく取り扱えるような統計モデルは存在しない

Practical Advice (2)

- モデルの user の立場からは，低次の GARCH 以上に複雑なモデルをあえて使う必然性はない
- 必要があれば EGARCH，GJR を使う（レバレッジ効果）
- 必要があれば，説明変数を追加（e.g. 短期金利）する
- 大抵は GARCH(1,1) でことが足りる：月次、週次データ
- Intradaily のデータ： ボラティリティの持続性は極端に高くなる
- より長期のサンプルを取り扱う場合：数年から 10 年単位でのボラティリティの水準のスィングが恐らくある．
- 派生証券以外で確率的ボラティリティ・モデル（Stochastic Volatility）を使う必然性はない．