資産価格の実証分析／金融経済論 II

Lecture 2: ランダム・ウォーク仮説のテスト

October 2001
Last Revised: October 2008

祝迫得夫

iwaisako@ier.hit-u.ac.jp

概要

基本的な概念の復習

- 純収益率 (net return)：$R_t = \dfrac{P_t}{P_{t-1}} - 1$
- 粗収益率 (gross return)：$1 + R_t = \dfrac{P_t}{P_{t-1}}$
- 対数リターン／連続複利の収益率：

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1}$$

- なぜ対数リターンの方が好ましいのか？

(1) 有限責任の原則との整合性： 正規性を仮定しても株価は負の値を取らない.

(2) 多期間のリターンを足し算で計算できる.

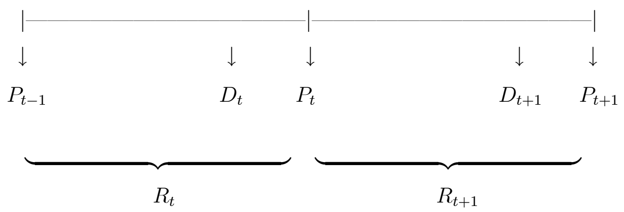
(3) ブラック＝ショールズ等で用いられる対数正規モデルとの整合性

- 配当・クーポン支払いを含んだリターン：

$$R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1$$

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right)$$

- 実証分析における時間の取り方の慣習



- 対数正規分布

$$r_{it} \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \tag{1}$$

- 株式収益率の分布について，対数正規性を仮定することの問題点

(1) 実際のリターンの分布は負の超過歪度を持つ：
 正規分布と比較した場合，極端なマイナスの値を取る可能性が高い.

(2) 実際のリターンの分布は正の超過尖度を持つ：
 正規分布と比較した場合，裾野の厚い分布となる.
 $\Longrightarrow$ARCH モデル（分散の時間を通じた変化を認める）

ランダム・ウォーク仮説の定義

- マルチンゲール

$$\mathrm{E}[P_{t+1} \mid P_t, P_{t-1}, ...] = P_t \tag{2}$$

$$\mathrm{E}[P_{t+1} - P_t \mid P_t, P_{t-1}, ...] = 0 \tag{3}$$

- ランダム・ウォーク仮説

$$P_t - P_{t-1} = \mu + \epsilon_t \tag{4}$$

ϵ_t： 平均ゼロで，$t-1$ 期までの情報を用いて予測することが不可能な撹乱項

$\Longrightarrow$ RW 仮説の検定 ＝ ϵ_t にどのような制約を置くか？

- 実際には，配当も含めた連続複利の収益率を考える

$$r_t = \mu + \epsilon_t \tag{5}$$

$\Longrightarrow$ 期待リターン一定の仮定

- ランダム・ウォーク１： $\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$

$$\mathrm{E}[P_t \mid P_0] = P_0 + \mu t \tag{6}$$

$$\mathrm{Var}[P_t \mid P_0] = \sigma^2 t \tag{7}$$

特殊ケース： 正規分布

$\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \longrightarrow$ 算術ブラウン運動

- ランダム・ウォーク２： ϵ_t が独立（同一分布である必要なし）

- ランダム・ウォーク３： ϵ_t が無相関

$\Longleftrightarrow \mathrm{Cov}[\epsilon_t, \epsilon_{t-k}] = 0$ for all $k \neq 0$

高次のモーメントで相関があっても良い

e.g.1 条件付き分散の系列相関：$\mathrm{Cov}[\epsilon_t^2, \epsilon_{t-1}^2] \neq 0$

e.g.2 GARCH(1): $\mathrm{E}_{t-1}[\sigma_t^2] = \beta_0 + \beta_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_t^2$

- ランダム・ウォーク仮説とマルチンゲール仮説の場合分け

$\mathrm{Cov}[f(r_t), g(r_{t+k})] = 0$	$g(r_{t+k})$ $\forall g(\cdot)$ 線形	$g(r_{t+k})$ $\forall g(\cdot)$
$f(r_t), \forall f(\cdot)$ 線形	相関なし RW3: $\mathrm{Proj}[r_{t+k} \vert r_t] = \mu$	–
$f(r_t), \forall f(\cdot)$	マルチンゲール (公平なゲーム) $E[r_{t+k} \vert r_t] = \mu$	独立な変化分 RW1,2: $\mathrm{pdf}(r_{t+k} \vert r_t) = \mathrm{pdf}(r_{t+k})$

効率的市場仮説との関係

- 1960年代: 効率的市場仮説（EMH）
  - Samuelson (1965):
    「正しく予測された価格はランダムに動くことの証明」
    ⟹ ランダム・ウォーク仮説の理論的基礎
  - Fama (1970, Journal of Finance; 1976, his book);
    ⟹ 実証分析のまとめ：「明白な事実」としての効率的な（株式）市場

- Roberts (1967)　　cf. 証券アナリスト試験

株式収益率の予測可能性のテスト：　情報集合（information set: Ω_t）による分類

$$E[P_{t+1} - P_t | \Omega_t] = 0 \tag{8}$$

– ウィーク型の効率性：
「過去の価格のみ」＝マルチンゲール

– セミ・ストロング型の効率性：
「全ての市場参加者が利用可能な情報のみ」

– ストロング型の効率性：「全ての私的情報」

- 1970年代後半：情報の非対称性と合理的期待

Grossmanのパラドックス
（Grossman and Stiglitz 1980, AER）

命題：「資産市場が効率的」

$\Longrightarrow$ すべての情報が価格に反映されている

$\Longrightarrow$ 私的情報に基づいて超過利潤を上げることができない

$\Longrightarrow$ 情報に基づいて利潤を追求する投資家は，マーケットに参加するインセンティブがない

$\Longrightarrow$ 情報は全く資産価格に反映されない

$\Longrightarrow$ 市場は効率的ではない（?!）

Cf.　ゲーム理論におけるCommon Knowledge

No speculation Theorem

- 1980年代以降：
  - Shillerなどによる，実証研究によるEMHの否定
  - 分散制約検定（variance-bound test）
  - Shiller (1981, *AER*); LeRoy and Porter (1981, *Econometrica*)

  - ノイズ・トレーダーモデルの登場
  - Black (1986) “Noise” *Journal of Finance*
  - Kyle (1985) “Insider Trading” *Econometrica*
  - DeLong et.al. (1990) “Noise Trader Risk...” *JPE*

- 1990年代後半以降
  - 大昔からあった議論（ケインズの美人投票）：非合理的な経済主体の行動がマーケットに与える影響
  - 反論（フリードマンの変動為替相場制擁護論）：無裁定条件が成立していたとすれば，そのようなノイズトレーダーは市場で生き残れない．
  - 行動ファイナンス（Behavioral Finance）：「ノイズトレーダー」＋「無裁定が成立しない制度的な要因」e.g. 空売りの制限，機関投資家の投資ホライズン
  - Shleifer and Vishny (1997) “Limits of Arbitrage” Journal of Finance; Shleifer (2000) Inefficient Markets, Oxford University Press.

効率的市場仮説に関するまとめ

- 完全に効率的な資産市場は存在しないし，厳密に言えばテストすること自体意味がない.

  cf. 物理学：真空状態での物体の落下

- 市場が情報の意味でより効率的になると，資産価格のボラティリティが高くなる可能性がある.

- 均衡モデルによる反例: 時間を通じたリスクの価格の変化（Lucas）

- ARCH 効果： 二次のモーメント（リスク）の変化と期待収益率（リターン）の関係

- それでも，ランダム・ウォーク仮説をテストする意味があるか？

  (1) 資産収益率の基本的な確率的性質の理解

  (2) 派生証券のプライシングにおける前提のチェック

ランダム・ウォーク仮説の古典的なテスト

- 「連続（Sequences）」と「反転（Reversals）」

$$I_t = \{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } r_t \equiv p_t - p_{t-1} > 0 \\ 0 \text{ if } r_t \equiv p_t - p_{t-1} \leq 0 \end{array}$$

「＋＋」,「−−」: 連続,　　「−＋」,「＋−」: 反転

- 「列（Runs）」: $\underbrace{++}\ \underbrace{---}\ \underbrace{+}\ \underbrace{--}\ \underbrace{++++}$

- フィルタールール：cf. 取引コストの問題

x%

$P_t = 0$ ——————————————————>

-x%

- テクニカル分析 $\Longleftrightarrow$ ファンダメンタルズ分析

自己相関係数とQ統計量

- 自己共分散と自己相関係数

$$r_t = \mu + \epsilon_t \tag{1.12}$$

$$\gamma(k) \equiv \mathrm{Cov}[r_t, r_{t+k}] \tag{1.13}$$

$$\rho(k) \equiv \frac{\mathrm{Cov}[r_t, r_{t+k}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[r_t]}\sqrt{\mathrm{Var}[r_{t+k}]}} = \frac{\mathrm{Cov}[r_t, r_{t+k}]}{\mathrm{Var}[r_t]} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \tag{1.14}$$

$$\sqrt{T}\widehat{\rho}(k) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, G)$$

- 小標本バイアスの修正

$$\widetilde{\rho}(k) = \widehat{\rho}(k) + \frac{T-k}{(T-1)^2}(1 - \widehat{\rho}(k)^2) \tag{1.15}$$

$$\frac{T}{\sqrt{T-k}}\widetilde{\rho}(k) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, G)$$

- RW1＝全ての自己相関係数がゼロ:　Box and Pierce (1970) の Q 統計量

$$Q_m = T\sum_{k-1}^{m}\rho^2(k) \tag{1.17}$$

帰無仮説の RW1 が正しければ：　$Q_m \sim \chi^2_m$

- 小標本バイアスの修正：　Ljung and Box (1987)

$$Q'_m = T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho^2(k)}{T-k} \tag{1.18}$$

分散比検定

- 二期間の分散比 :「連続複利の収益率の分散」と「一期間の収益率の分散」の比 $\Longrightarrow$ VR(2)

$$\mathrm{VR}(2) = \frac{\mathrm{Var}[r_t(2)]}{2\mathrm{Var}[r_t]} = \frac{\mathrm{Var}[r_t + r_{t-1}]}{2\mathrm{Var}[r_t]} \tag{1.19}$$

$$= \frac{2\mathrm{Var}[r_t] + 2\mathrm{Cov}[r_t, r_{t-1}]}{2\mathrm{Var}[r_t]}$$

$$= 1 + \rho(1) \tag{1.20}$$

- $H_0 :\quad VR(2) = 1$

$VR(2) > 1 \iff \rho(1) > 0 :$　正の系列相関

$VR(2) < 1 \iff \rho(1) < 0 :$　負の系列相関

- より一般的なケース：「q 期間の連続複利の収益率の分散」と「一期間の収益率の分散」の比

$$VR(q) \equiv \frac{\mathrm{Var}[r_t(q)]}{q \cdot \mathrm{Var}[r_t]} = 1 + 2\sum_{k=1}^{q-1}(1-\frac{k}{q})\rho(k) \tag{1.21}$$

$$r_t(k) = r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}$$

$\rho(k) = \{r_t\}$ の k 次の自己相関係数

- $VR(q) \Longrightarrow$ 線形に減少するウェイトで加重した $\{r_t\}$ の最初の $q-1$ 次の自己相関係数の和

  Cf. Bartlett kernel; Newey and West (1987, Econometrica)

- 直観的説明

  もし確率過程 x_t がランダム・ウォークに従うとすれば，x_t の分散は，時間に線形に比例する．

分散比検定の実際

- OLS による推定の前提：分散が均一

- RW のテスト

1. RW1 や RW2 ではなく，RW3 をテストする方が妥当．だが，不均一分散の扱いを考えなければならない．

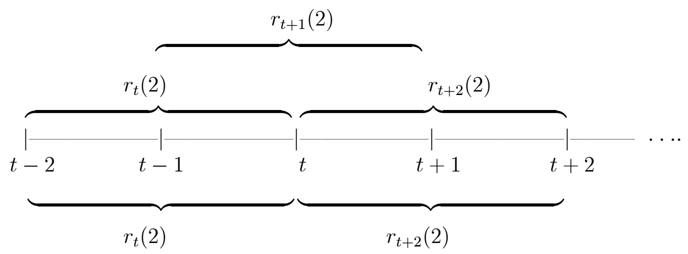
   方法 1. 直接，不均一分散の形状（form）をモデル化する．
   e.g. ARCH/GARCH モデル

   方法 2. Lo and MacKinlay (1988): White の不均一分散頑強な標準偏差推定量を用いる．

2. Overlap するデータを用いる

- – Overlap するデータをとった方が観察値が増える．
  (Hansen and Hodrick, 1980 JPE)

– $r_t(2)$ と $r_{t+1}(2)$ は独立ではないので，Overlap した観察値をとることで観察値が増えたとしても，同じだけ独立な情報が増えるわけではない.



分散比検定による予測可能性のテスト

- 短期：Lo and MacKinlay (1988; Review of Financial Studies)：CLM 第２章を参照.
  - 分散比検定の統計的推論に関する厳密な議論
  - 戦後のアメリカのデータ：CPSP インデックスの週次データ
    水曜日から翌週の水曜日までのリターン（曜日効果の排除）
  - 明確な正の系列相関の存在
  - 系列相関の強さ：単純平均＞価値加重平均
    理由については別途検討する
  - 古いサブ・サンプル＞新しいサブ・サンプル：
    マーケットの効率化？

- 長期： Poterba and Summers (1988; J.of Financial Economics)
  - 「平均回帰性（mean-reversion）」：いわゆる時間分散投資のメリットの源泉
  - ランダム・ウォーク：投資期間が２倍 $\Rightarrow$ 期待収益率・分散ともに２倍
  - 平均回帰性（負の長期的系列相関）が存在：
    投資期間が２倍 $\Rightarrow$ 期待収益率２倍, 分散は２倍より小
  - 長期リターン（３年，５年，１０年...）には平均回帰性が存在する

- 問題点：１００年のデータセット

  独立な１年リターン１００個
  独立な３年リターン３３個
  独立な５年リターン２０個

cf. 山本拓『経済の時系列分析』
「時系列の分析を行うには，最低５０個以上観察値があるのが望ましい」

漸近問題の取り扱いとモンテカルロ

- $T = nq$

  ただし，T : サンプル数;　q : 投資期間;　n: 独立な観察値の数

- 通常の漸近理論：$n = T/q \to \infty$　or　$q/T \to 0$

  つまり q/T が大きい場合には，漸近理論を使えない．

- Lo and MacKinlay： $n \to \infty$ のとき

$$\widehat{VR}(q) \overset{a}{=} 1 + 2\sum_{k=1}^{q-1}(1-\frac{k}{q})\widehat{\rho}(k) \tag{1.22}$$

帰無仮説のもとでは，すべての q について $\widehat{\rho}(k)$ はゼロに概収束（almost surely）する．

- Richardson and Stock (1989)： もし $q/T \to \delta \in (0,1)$ ならば

$$\widehat{\mathrm{VR}}(q) \xrightarrow{d} \int_{\delta}^{1} X_{\delta}^{2}(\tau) d\tau \tag{1.23}$$

$$X_{\delta}(\tau) \equiv B(\tau) - B(\tau-\delta) - \delta B(1), \tag{1.24}$$

ただし $B(\tau)$ は単位区間上で定義された標準ブラウン運動.

（1.24）式の右辺の期待値は

$$E[\frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{1} X_{\delta}^{2}(\tau) d\tau] = \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{1} E[X_{\delta}^{2}(\tau)] d\tau = (1-\delta)^{2} \tag{1.25}$$

したがって $\delta = 1/3$ なら，分散比 $\widehat{VR}(q)$ の期待値は $4/9 = 0.444... << 1$.

- ランダム・ウォーク仮説が正しくても，投資ホライズンがサンプル全体に比べて十分に大きければ，分散比検定はランダム・ウォーク仮説を確実に棄却する

ランダム・ウォーク仮説の実証の現状

- 分散比検定に関する統計学的な結論：
  短期： 明白に正の系列相関が存在 (Lo and MacKinlay)
  長期： 現在ある証拠からだけでは，どちらとも言い切れない.

- 追加的な予測変数（短期利子率，株価／配当比率等）の導入 (CLM, Chap.7).

- 長期の依存関係 : Fractional integration, 基準化されたレンジ等計量（Mandelbrodt）等
  - 統計的には，あまり頑強な証拠はない
  - 対立仮説の経済学的意味が明確ではない
  - CLM2.6; 田中勝人『現代時系列分析』第 7 章.

- 長期投資は有利か？

  (1) 収益率のデータだけでは，時間分散効果の存在を信じるに足る強固な理由はない.

  (2) Buy-and-hold 戦略：取引コストの最小化

  (3) コスト平均法（マルキール）: 所詮，素人には売り買いのタイミングを判断するのは不可能.

- 平均回帰性（リターンの予測可能性）

  セイラー $>>$ シーゲル $\geq$ マルキール

Must read

- （まだ読んでいないなら）バーンスタイン『証券投資の思想革命』日本経済新聞社

  第 I 部； 第 III 部

- CLM

  第 1 章 1.4-1.5

  第 2 章 2.1, 2.4-2.5（数学的に難しいところは飛ばしていい）; 2.7-2.8

If your time allows...

- セイラー『市場と感情の経済学』第 12 章「株価は平均に回帰する」（ただし，かなりアンチ効率的市場仮説の方向にバイアスがかかっている）

- シーゲル『株式投資長期投資で成功するための完全ガイド』林・藤野監訳，日経 BP 社

- 田中勝人『現代時系列分析』第 8 章.