資産価格の実証分析／金融経済論 II

Lecture 2B: 非定常な時系列に関する補論

October 2006
Last Revised: Occtober 2008

祝迫得夫

iwaisako@ier.hit-u.ac.jp

時系列分析の基本概念

- 確率過程＝時間を通じて変動する確率変数の列 $\{x_i\} \quad (i = 1, 2, ...)$ が確率過程
- 確率過程の実現値＝サンプル・パス（sample path）
- 個々の $\{x_i\}$ がとり得る値の組み合わせの中で，実際に実現したもの.
- 時系列変数 Time Series

なぜ定常性が必要か？

- 「定常な確率過程」:
  (i) $\mathrm{E}(x_i)$ が i に依存せず
  (ii) $\mathrm{Cov}(x_i, x_{i-j})$ が存在し，有限であり，j には依存するが i には依存しない時
  例えば，$\mathrm{Cov}(x_1, x_5) = \mathrm{Cov}(x_{12}, x_{16})$

  このとき「確率過程 $\{x_i\}$ は共分散定常（covariance stationary）」であるという．

- 時系列変数では，ある時点での x_i の実現値は1個しかない．統計的分析を行なう（平均，分散，共分散などのパラメーターを推定する）ためには，同じ性質を持つ似たような x_i が，ある程度繰り返し発生する必要がある．

具体例：ARモデル

- 確率過程 $\{x_i\}$ の確率モデルが，各時点 t について，

  $x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + ... + \phi_p x_{t-p} + \epsilon_t$

  で表されるとする．このとき x_t は次数 p の自己回帰モデル（$AR(p)$ モデル）に従うという．

- 定常性の条件：$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - ..... - \phi_p x^p = 0$ の解の絶対値がすべて1より大きいこと．

- AR(1) モデルのケース：$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1}$
=>　$-1 < \phi_1 < 1$

- 場合わけ
(1-a) $0 < \phi_1 < 1$: 単調・収束
(1-b) $-1 < \phi_1 < 0$: 循環・収束
(1-c) $\phi_1 = 0$: Trivial

(2-a) $1 < \phi_1$: 単調・発散
(2-b) $\phi_1 < -1$: 循環・発散
(3-a) $\phi_1 = 1$: 単調・恒常的
(3-b) $\phi_1 = -1$: 循環・恒常的

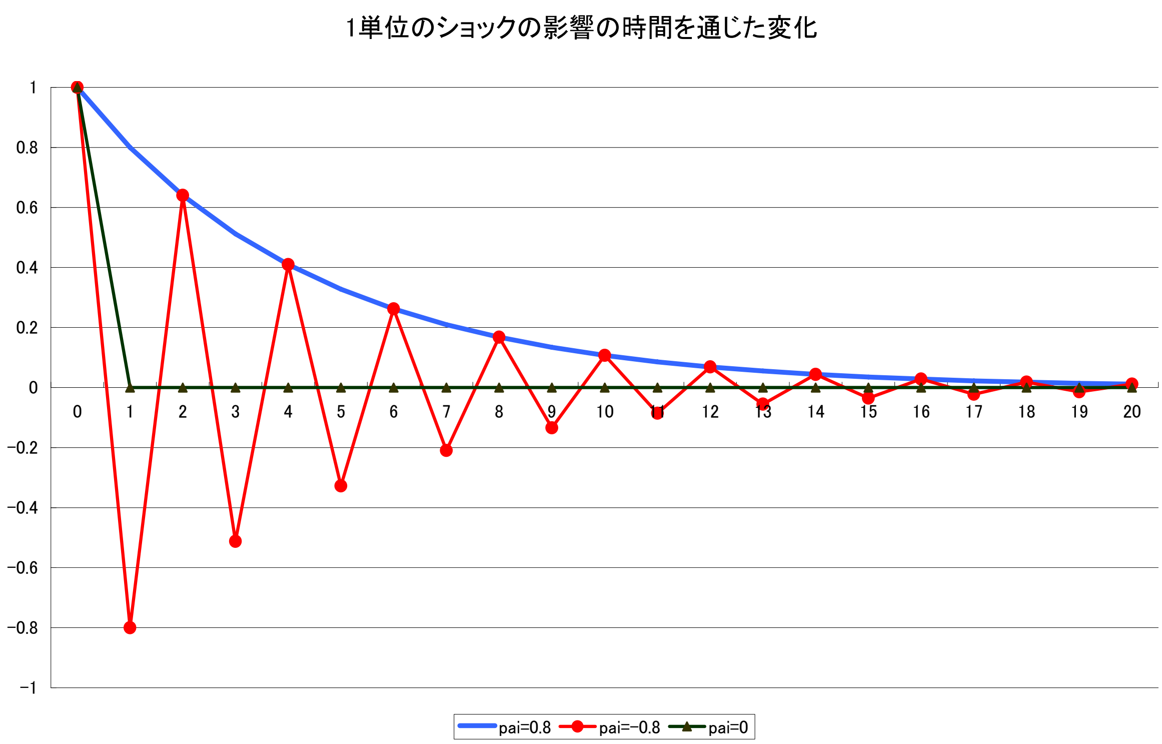
- 定常性：　(2)&(3) のケースを排除する．

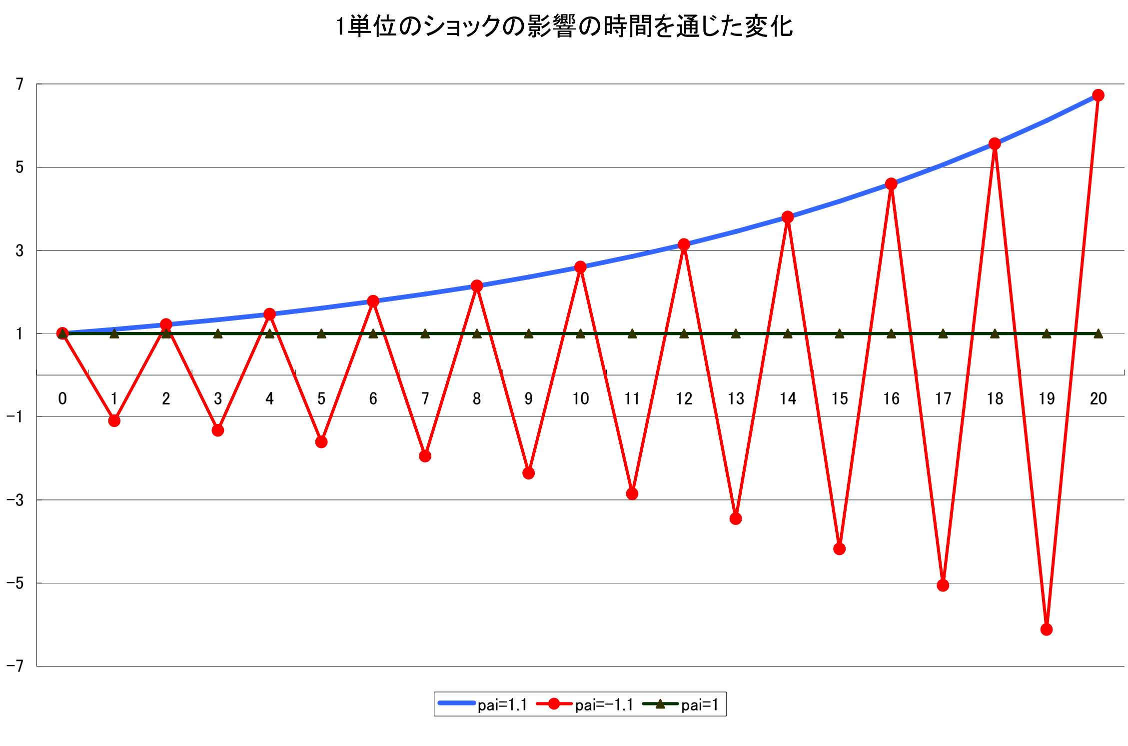
- $\phi_1 = 1$ の場合、この確率過程は「単位根（unit root)」を持つという．

- ある変数が定常ではないと考えられる場合
＝＞　差分をとることによって対処する

- $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$

- ある変数が，d 回差分をとることによって初めて定常になる場合，$\{x_i\}$ は $I(d)$ 過程に従うという．
＝＞　$I(0)$：定常過程
  - cf. $I(.)$ =Integrated;　集積する


1単位のショックの影響の時間を通じた変化
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
pai=0.8
pai=−0.8
pai=0


1単位のショックの影響の時間を通じた変化
7
5
3
1
-1
-3
-5
-7
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
pai=1.1
pai=−1.1
pai=1

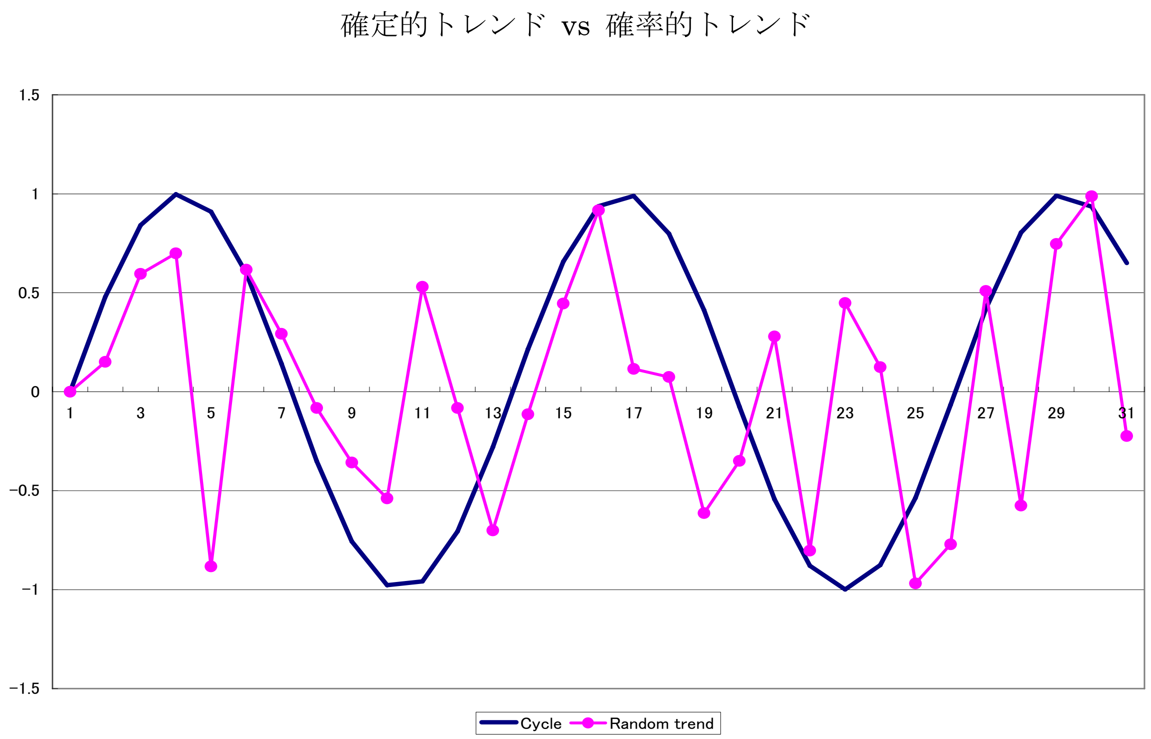
経済学的インプリケーション

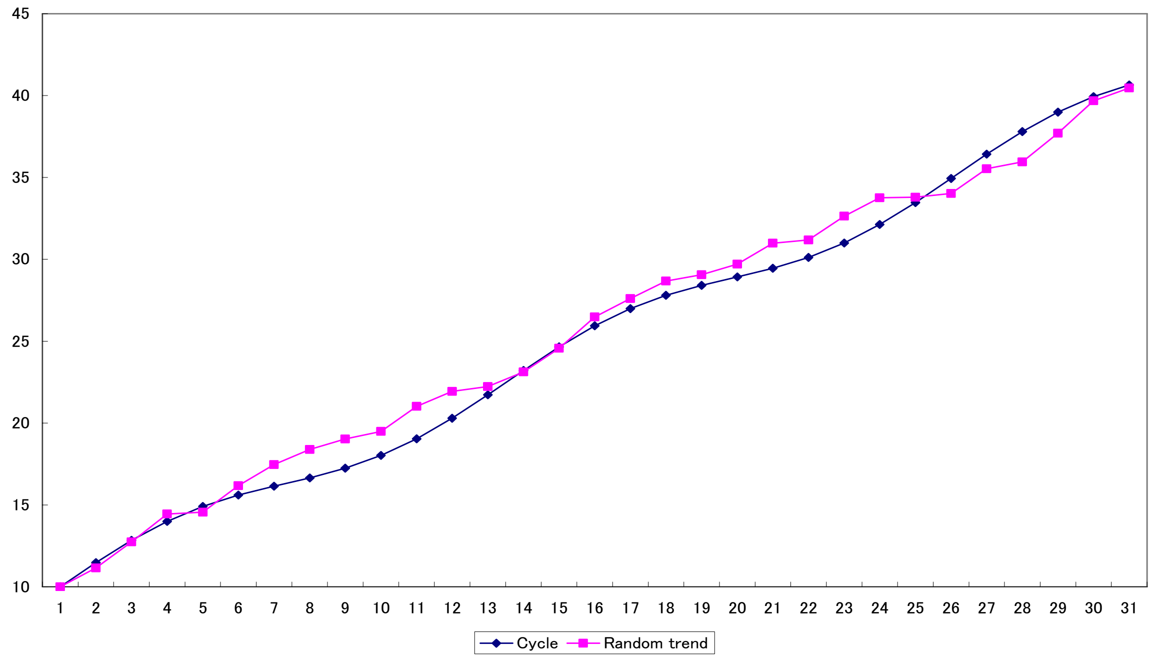
- 経済モデルとしてのインプリケーション：
確率的トレンド or 確定的トレンド

- 例1：GDPの成長率
  - ケインジアン：長期的なトレンド周りの循環
    - 一時的なショックがあっても，ある程度の期間が経てば長期的なトレンドに回帰していく.
    - Hicksの景気循環論;潜在GDPと実際のGDPの乖離
    - 景気変動のショックは一時的
  - リアル・ビジネスサイクル・モデル
    - 生産性ショックが景気循環の主な源泉（Kydland=Prescott）
    - 景気変動のショックは恒常的

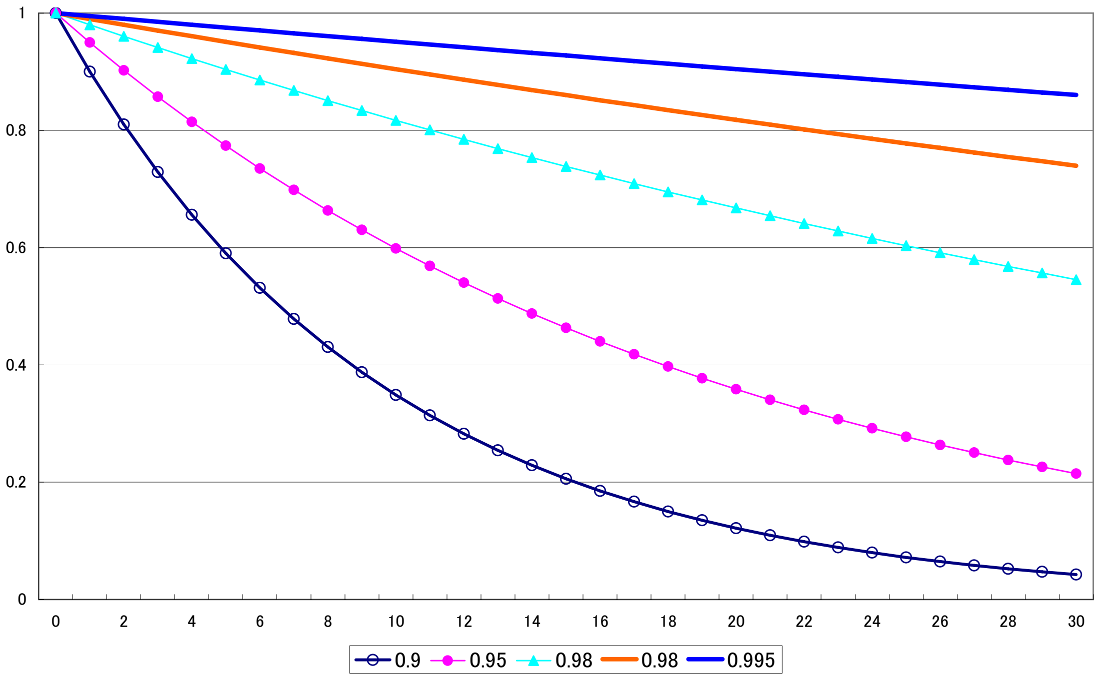
GDPギャップの推計

- GDPギャップ $=\frac{y_t-\tau_t}{\tau_t}$
  - y_t: 実際のGDP;　τ_t: 潜在GDP
  - τ_t をどうやって推定するか？
- 生産関数アプローチ: $\tau_t = F(K_t^*, L_t^*)$
- Hodrick-Prescott フィルター
$$Min \sum_{t=1}^{T} (y_t - \tau_t)^2 + \sum_{t=2}^{T-1} \lambda \left[(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})\right]^2$$
  - $\lambda = 0$:線形トレンド　$\lambda = \infty$:実際のデータそのもの
  - 経験的に四半期なら $\lambda = 1,600$.


確定的トレンド vs 確率的トレンド
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31
Cycle
Random trend

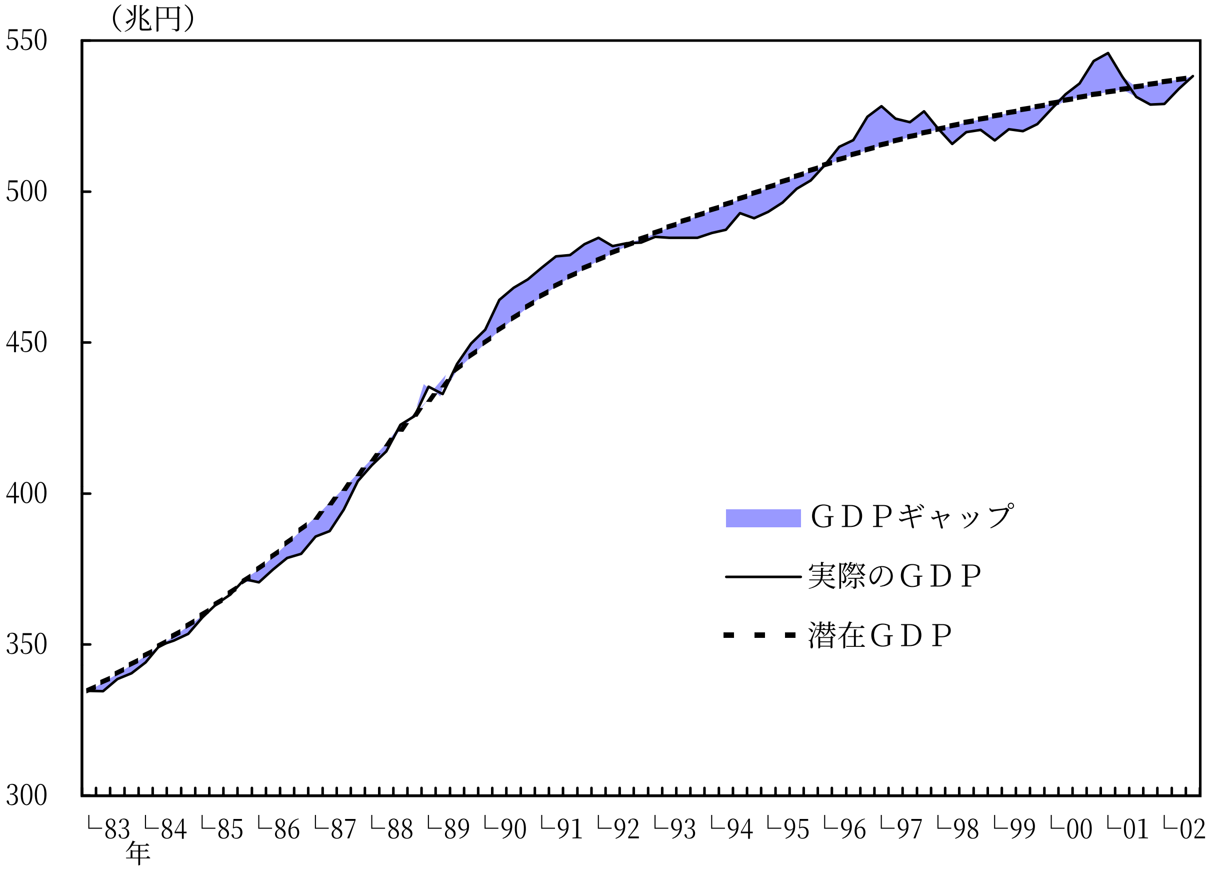

45
40
35
30
25
20
15
10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
Cycle
Random trend

Near unit root の場合



（図表１６）

ＨＰフィルター・アプローチによるＧＤＰギャップ

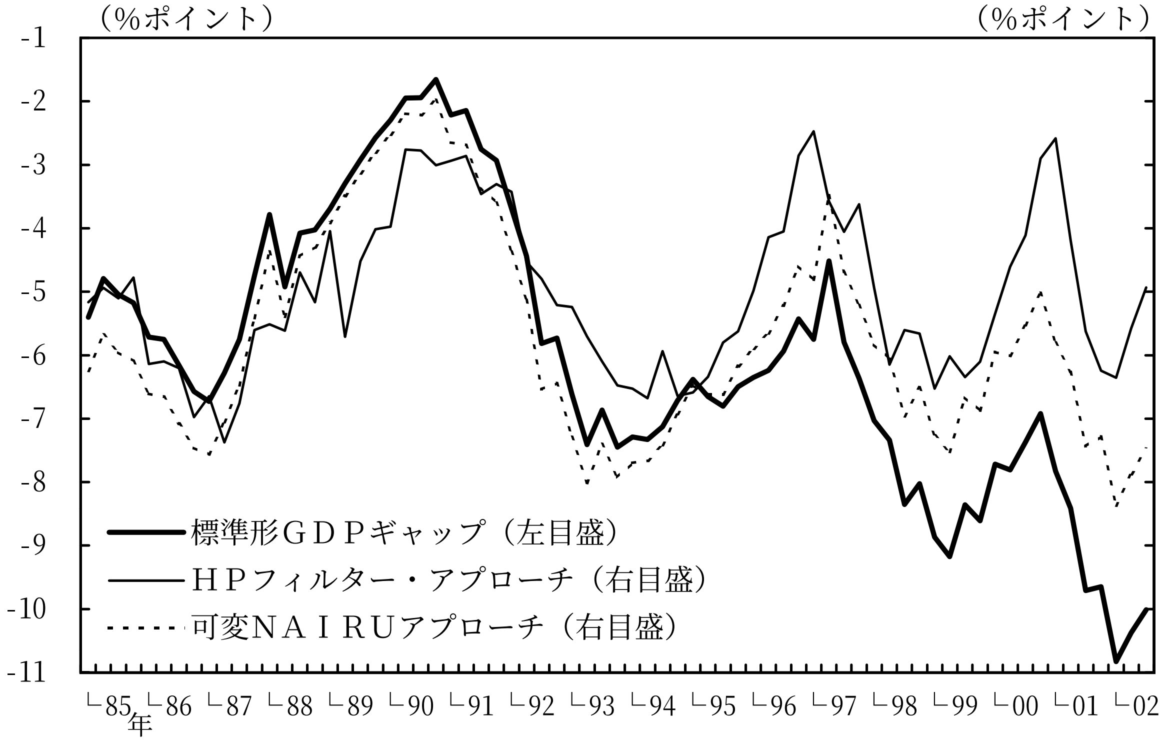


（注）　実質ＧＤＰは、1994年第1四半期から1999年第4四半期までについては、「参考系列」を使用した。

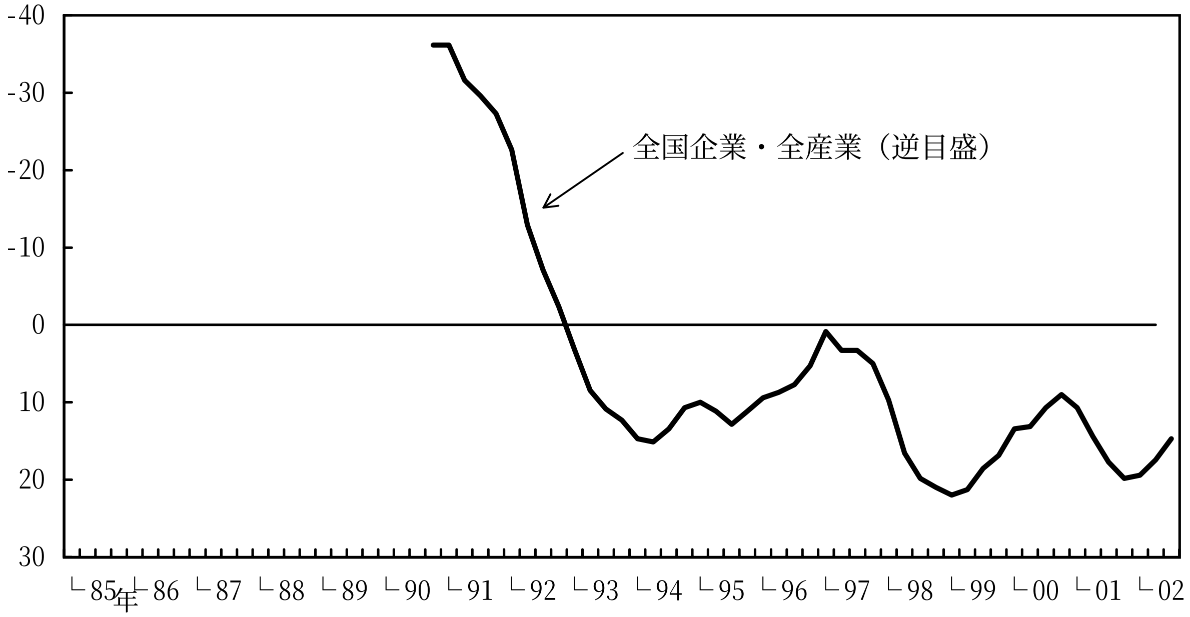
（資料）内閣府「国民経済計算」

（図表２０）

各種ＧＤＰギャップの比較



＜参考＞ 短観Ｄ．Ｉ．によるＧＤＰギャップ類似の指標



（注）１．生産・営業用設備判断Ｄ．Ｉ．と雇用人員判断Ｄ．Ｉ．を資本・労働分配率（90～00年度平均)で加重平均したもの。
２．生産・営業用設備判断Ｄ．Ｉ．の調査対象は、90/3Ｑ以前は製造業に限られていた。このため、非製造業にまで調査対象が拡大された90/4Ｑ以降について、上記計数を算出。
３．98/12月調査までは調査対象企業見直し前の旧ベース、99/3月調査からは新ベース。
４．実質ＧＤＰは、1994年第1四半期から1999年第4四半期までについては、「参考系列」を使用した。

（資料）内閣府「国民経済計算」「民間企業資本ストック」、経済産業省「鉱工業指数統計」、厚生労働省「毎月勤労統計」、総務省「消費者物価指数」、日本銀行「卸売物価指数」等

- 株価：長期リターンにおける，恒常的ショックと一時的ショックの分解

$$
\begin{aligned}
p_t &= w_t + y_t \\
w_t &= w_{t-1} + \epsilon_t \text{ (random walk)} \\
y_t &= \text{平均ゼロの定常過程}
\end{aligned}
$$

- 分散比

$$
\mathrm{VR}(q) \to 1 - \frac{\mathrm{Var}\left[\Delta y_t\right]}{\mathrm{Var}\left[\Delta y_t\right] + \mathrm{Var}\left[\Delta w_t\right]}
$$

- ランダム・ウォークの要素が支配的なら，分散比は1に近づく．

$\boxed{\text{定常性のテスト：単位根検定}}$

- $\phi_1 = 1$ のケース：単位根が存在
  $H_0 : \phi_1 = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \phi_1 < 1$

- 問題点：通常のOLSでは，H_0 の下で観察値が十分多ければ $\sqrt{T}(\widehat{\phi}_1 - \phi_1)$ は正規分布．しかし，単位根が存在する場合（$\phi_1 = 1$）は，$\widehat{\phi}_1$ の分布は観察値が多くても正規分布にならず，左に歪んだ分布になる．したがって通常の t 検定は使えない．

- Dickey-Fuller 検定

$$T(\widehat{\phi}_1 - 1) = T\frac{\sum_{t=2}^{T} x_{t-1} \vartriangle x_t}{\sum_{t=2}^{T} x_{t-1}^2} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}(W(1)^2 - 1)}{\int_0^1 W(r)^2 dr}$$

- ただし，$W(t)$ は標準ウィーナー過程（ブラウン運動）であるとする．すなわち，

$$W(0) = 0, \qquad W(1) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- この分布の式自体は忘れて構わないが，Dickey-Fuller がモンテカルロ・シミュレーションで求めた表を用いることを覚えておくこと．

単位根検定の実際（１）

- $T(\widehat{\phi}_1 - 1)$ の分布に基づく検定
  (1-a) $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \epsilon_t$

  (1-b) $x_t = \beta_0 + \phi_1 x_{t-1} + \epsilon_t$

  (1-c) $x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi_1 x_{t-1} + \epsilon_t$

- t 統計量に基づく検定

  (2-c) $\vartriangle x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \delta x_{t-1} + \epsilon_t$

  $H_0 : \delta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \delta < 0$

単位根検定の実際（２）

- ϵ_t がホワイトノイズでない（系列相関がある）場合

  (3-c) $\triangle x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \delta x_{t-1} + \sum \theta_i x_{t-i} + \epsilon_t$

  Augmented Dickey-Fuller テストを使う

- 使う統計量の表は Dickey-Fuller テストと同じ.

まとめ

- 「単位根検定＝ランダム・ウォークのテスト」ではない
- CLM2.7 参照
- Near unit root の問題： $\phi_1 = 0.95...$
- ある変数が単位根を持たないと考えられるとしても，小標本では区別がつかない.
- むしろ単位根だと考えて，統計分析を行ったほうが良い.
- 分析対象の変数の持続性（persistence）が強い場合：
  e.g. 短期金利の変動（next handout）
  株価配当比率