資産価格の実証分析／金融経済論 II

Lecture 1: 理論モデルと実証分析の関係

September 2006
Last Revised: October 2008

祝迫得夫

iwaisako@ier.hit-u.ac.jp

 1

資産価格モデルのSDF表現

cf. 本多 (2005), Cochraneの教科書の最初の方

- 例：消費CAPM：$u'(C_t) = \delta E_t[u'(C_{t+1})(1 + r^i_{t+1})]$
- $m_{t+1} \equiv \delta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}$
- $1 = E_t[m_{t+1}(1 + r^i_{t+1})]$

- m_{t+1}: 確率割引ファクター (stochastic discount factor: SDF)
- $1 = E_t[m_{t+1}(P_{t+1} + D_{t+1})/P_t]$
- $P_t = E_t[m_{t+1}X_{t+1}]$
- リスク中立のケース
  $P_t = E_t[\frac{1}{R_f}(P_{t+1} + D_{t+1})] \Rightarrow m_{t+1} = 1/R_f$

一般的議論

- 金融資産の価格ベクトル： P
- １期後のペイオフ行列： X
- 価格付け汎関数 (pricing functional) を $m(.)$ で表す: $P = m(X)$
- 各金融資産の購入量ベクトルを ϕ とする
- 一物一価の法則から，ポートフォリオの価格は ϕP したがって $\phi P = m(\phi X)$

- $m(.)$ は線形でなければならない： $P = m \cdot X$
- 資産収益率の式に書き換えると： $\iota = m \cdot R$

  ただし $\iota = [1, 1, ..., 1], \quad R = [R^1, R^2, ...R^i, ..., R^I]$
- 線形の汎関数（pricing functional），m を，確率割引ファクター（SDF）と呼ぶ.

古典的な資産価格モデル

- 理論的な基礎が異なっても，すべての資産価格モデルは，各資産のリターンがファクターに線形に依存する形で表現される

- $r^i = \beta_0^i + \beta_1^i \cdot f_1 + ... + \varepsilon^i$

  ただし，$f_k (k = 1, ...K)$ は共通するリスク･ファクター.

- 例： CAPMの場合，$K = 1$ であり，f_k はマーケット・ポートフォリオ.

  $r^i = \beta_0^i + \beta_1^i \cdot R_m + \varepsilon^i$

SDFと資産価格モデルの関係

- Duffie : 三つの基本的条件とは「無裁定・単一主体の最適性・市場の均衡」

- 三つの条件が要求する制約は,
  「無裁定　<　最適性　<　市場均衡」
  の順で強くなる

- 無裁定条件（pricing functionalの線形性）が満たされている限り，どのような資産価格モデルに関しても，それに対応する確率割引ファクターが存在する.

- 資産価格とそのSDF表現の対応関係の厳密な議論については，Cochraneを参照

SDFとアロー=デブリュー証券

- $t=0$において金融資産が取引．$t=1$にはS個の経済の状態のうちの一つが発生
- アロー=デブリュー証券の価格（状態価格：state price）：　π_s　$(s=1,2,.....,S)$
- 金融資産iの各状態におけるペイオフ：　x_s^i
- 資産iの価格は：　$p^i = \pi_1 x_1^i + \pi_2 x_2^i + ... + \pi_S x_S^i$
- 状態sの価格π_sと，発生確率θ_sの比率：　$m_s = \pi_s/\theta_s$

- したがって

$$\begin{aligned} 1 &= \theta_1 m_1 R_1^i + \theta_2 m_2 R_2^i + ... + \theta_S m_S R_S^i \\ &= E[mR] \end{aligned}$$

- 確率割引ファクターmは，状態価格/状態発生確率の比m_sのベクトル．
- mは，市場が完備（complete）な場合には一意に定まるが，非完備（incomplete）な場合，一般に複数存在する．

実証分析上のSDF

- T 期間の実際の資産市場のデータ
- 特定のSDF，m_t は，T 個の観察値を持つ一変数の確率変数のサンプル・パス（実現値）.
- （実際上は）特定の線形のファクターの組み合わせ.
- 複数の資産が存在する場合，m_t はすべての資産について，$1 = E[mR]$ の関係を満たす.

注意点

- 理論上の裁定取引：
  「すべての状態で非負のペイオフをもたらし，少なくとも一つの状態で必ず正のペイオフをもたらすような，価格ゼロの投資機会」
- 現実世界での「裁定取引」は，必ずしも無リスクではない（プロフェッショナル・アービトラージ）
- 厳密な意味での無裁定条件は成立していないかもしれない
  cf. 行動ファイナンス

どのようにSDFをモデル化するか？

- どのようなデータについて分析したいか？

- 講義の前半：時系列データ
  → RW仮説等のSDFの時系列のモデル

- 講義の後半：クロスセクション
  → クロスセクション・データによる m_t への制約
  CAPM／APT
  Fama-French

SDFの時系列モデル

- 時間を通じて期待リターンが一定
  - （いろいろなversionの）ランダム・ウォーク
    $E_t[r_{t+1}] = \overline{r}$ もしくは $r_{t+1} = \overline{r} + \epsilon_{t+1}$
  - 時間を通じて一定のSDF: $E_t[m_{t+1}] = \overline{m}$
  - $1 = E_t[\overline{m}(1 + r_{t+1})] = \overline{m}E_t[(1 + \overline{r})]$

- 時間を通じて期待リターンが変動
  - $E_t[r_{t+1}] = \alpha + \beta x_t$ もしくは $r_{t+1} = \alpha + \beta x_t + \epsilon_{t+1}$
  - 予測変数 x_t としてよく用いられる変数
    ＊短期金利
    ＊配当利回り，もしくは株価／配当比率
    ＊株価／収益比率（PER）
  - SDF を使った表現：$1 = E_t[m_{t+1}(1 + r_{t+1})]$
    $E_t[m_{t+1}] = \gamma + \delta x_t$

Workhorse

- AR モデル
- HAC 推定 (HAC=heteroscedasiticity-asutocorrelation consistent)
  - Practical には，不均一分散と系列相関をどう処理するか.
  - White; Newey &West; Andrews & Monanhan
  - Hamilton の 10.4 を参照
- 単位根検定